CAPÍTULO III - LA HERRAMIENTA: EL INFINITO

"Al infinito... y más allá".

*En boca del maravilloso personaje **Buzz Lightyear**, en la película animada "Toy Story".*

Introducción

Este capítulo es bastante especial. No sólo es el capítulo más extenso de este libro, sino que sus conclusiones se vinculan conceptualmente con muchos de los temas tratados en otros capítulos.

El infinito es uno de los temas que ha fascinado no sólo a muchos matemáticos sino a numerosos no especialistas a lo largo de la historia de la humanidad. Es un tema atractivo y, como tal, forma parte de muchas expresiones mundanas y ha sido (y es) tema recurrente en publicaciones de toda índole.

Yo pretendo abordar el tema desde un punto de vista particular.

No me motiva especialmente el infinito desde el punto de vista matemático.

Mi análisis del infinito se vincula fuertemente a su relación con el mundo físico del que formamos parte y a la forma en que la aceptación, o no, de la existencia de infinitos, condiciona nuestra concepción de la realidad.

Como veremos, el infinito tiene una contrapartida obligatoria, de la que no todo el mundo es plenamente consciente: ***El continuo***. Y, a veces, resulta más fácil entender las propiedades del infinito, analizando las de este otro "objeto" que parece más palpable o comprensible.

… sólo lo parece. ☺

Algo continuo es algo que no posee interrupciones. El ejemplo más simple de continuo (con el que se comparan todas las otras formas de "continuo") es la sucesión de números reales cuya representación geométrica es la recta euclidiana. La recta es tan “continua” que, por definición, entre cualquier par de puntos hay infinitos puntos adicionales.

En principio, es imposible imaginar “huecos”, o posiciones no ocupadas, en un objeto definido de tal forma.

Del mismo modo, entre cualquier par de números reales existen, por definición, infinitos números reales adicionales.

Ya volveremos sobre estas engañosamente simples definiciones. Y veremos que, para nuestra mente, el continuo es algo tan difícil de concebir como el infinito. Por ahora basta con mencionar que si la imagen mental que les sugiere la descripción de una recta es una serie de puntos de forma redondeada, uno al lado de otro, esa imagen no es adecuada. Los puntos no pueden tener forma alguna puesto que no tienen tamaño.

Pero claro… imaginar algo sin tamaño es muy difícil ¿verdad? ☺

Bueno, esa es la idea. Este capítulo trata con entidades muy difíciles de imaginar.

Y, lo que es peor, … pretende transformar esas entidades en algo entendible.

Por ahora, lo dicho ayuda a entender por qué el infinito y el continuo son dos formas de expresar el mismo concepto. Algo continuo se puede subdividir hasta el infinito. Y el infinito es algo que continúa eternamente.

***Nota**: Por necesidades que resultarán evidentes más adelante estoy cometiendo algunos errores o tomándome licencias de lenguaje en algunas de las cosas que estoy diciendo. Como veremos, en los primeros planteos vinculados al concepto de infinito, no estoy siendo riguroso con mis propios conceptos, pero, por ahora, hasta que introduzca las definiciones y ejemplos necesarios, estoy “obligado” a hacer afirmaciones que más adelante van a entrar en cierta contradicción semántica con las ideas que estoy desarrollando.*

En el camino, a lo largo de estos análisis, espero revalorizar y hacer entendibles los fundamentos de algunas de las escuelas de pensamiento griegas. De hecho, espero demostrar que algunos de los argumentos de los antiguos filósofos griegos siguen siendo, actualmente, tanto o más válidos que cuando fueron formulados, hace más de 2.000 años.

En la actualidad suele afirmarse que la moderna teoría atómica es una rama del conocimiento no vinculada directamente a la primera escuela del atomismo desarrollada en Grecia, cuyo más conspicuo representante fue Demócrito.

En alguna medida, para muchos pensadores actuales, los argumentos de Demócrito no fueron una demostración de la existencia de partículas indivisibles, sino una argumentación, de entre todas las posibles a través del "pensamiento puro", que *casualmente* coincidió con las conclusiones de la revolución científica de los últimos siglos. En otras palabras esa coincidencia no se toma como algo obligatorio sino como un resultado accidental.

Dicho en lenguaje simple, mucha gente opina que Demócrito tuvo suerte al *acertar* el resultado correcto.

Más aún, de acuerdo con los mecanismos aceptados de funcionamiento de la ciencia actual, las demostraciones del tipo de las realizadas por Demócrito o por Zenón (otro de los grandes pensadores de la antigüedad) carecen del rigor necesario para ser consideradas verdaderas demostraciones.

Sin embargo, en el Capítulo I, dedicado a la Ciencia como objeto de estudio, ya hemos visto que las cosas no son tan *blanco o negro* en el tema de las demostraciones científicas.

De hecho, espero documentar, mediante este capítulo, por qué sostengo que los modelos científicos (una pieza clave de la ciencia) no son sólo el resultado directo de los experimentos.

En particular, veremos que el modelo científico a analizar en este capítulo es crucial para desarrollar nuestra visión de la realidad. De hecho, la discusión entre un Universo continuo u otro formado de entes discretos, se remonta a los orígenes del pensamiento filosófico.

Y es más o menos sencillo verificar que posiblemente la solución a este dilema básico no se encuentre en el método experimental. Cada vez que llegamos a identificar una partícula "elemental" la sometemos a estudio para determinar si es realmente una pieza indivisible.

- Si logramos dividirla en entes más "elementales" hemos dado un paso más en la escala de las partículas elementales.

- Pero, si no logramos dividirla no aceptamos este resultado como una verdad última sino que buscamos nuevas alternativas y tomamos el resultado experimental sólo como provisorio.

De esta forma, parece imposible que este mecanismo nos permita llegar a un resultado definitivo. ☹

Por lo tanto es razonable que tratemos de encontrar una vía alternativa (no directamente experimental) para demostrar la existencia o ausencia de continuos y/o infinitos en nuestro Universo físico.

En el camino, tal vez todavía podamos aprender algunas cosas de los primeros grandes pensadores.

Sólo es cuestión de que seamos capaces de romper algunas ligaduras que, en el transcurso de las últimas centurias, han ido condicionando nuestra forma de entender el mundo en general y la ciencia en particular.

Por último, debo hacer una mención especial sobre los motivos por los que he analizado el infinito de la forma en que lo presento en este desarrollo.

Para mí, el infinito y el continuo no son sólo una pieza de estudio interesante. Desde mi punto de vista, detrás de estos conceptos (o de su ausencia) se encuentra una posible clave para entender el libre albedrío, que, como ya dije, es el hilo conductor de estos escritos. En un mundo continuo la relación causa efecto es inevitable a todo nivel, y los caminos son reversibles. La importancia de estas dos características del continuo se verá en los desarrollos siguientes.

En resumen, en este capítulo aspiro a tratar de convencer al lector sobre la imposibilidad de que el continuo y el infinito formen parte de los procesos físicos. Espero que los argumentos y ejemplos resulten adecuados para este fin.

Definiciones

Las siguientes definiciones están tomadas del sitio web de la Real Academia Española:

http: //www.rae.es.

Infinito: Que no tiene, ni puede tener, fin ni término.

Continuo: Que dura, obra, se hace o se extiende sin interrupción.

Punto: *Geóm*. Límite mínimo de la extensión, que se considera sin longitud, anchura ni profundidad.

Número Natural: *m. Mat.* Cada uno de los elementos de la sucesión 0,1,2,3…

Número Real*: m. Mat.* El que se expresa por un número entero o decimal.

***Nota**: Recurriendo a Wikipedia, he tomado el siguiente texto para aclarar o ampliar la definición de número real: "Los números reales miden cantidades continuas que se expresan con fracciones decimales que tienen una secuencia infinita de dígitos a la derecha de la coma decimal... Frecuentemente también se sub-representan con tres puntos consecutivos al final (324,823211247...), lo que significaría que aún faltan más dígitos decimales, pero que se consideran sin importancia".*

Objetivos

Aunque ya fueron explicados en los párrafos introductorios, es conveniente que puntualice los objetivos principales de estos desarrollos.

1. Analizar la aplicabilidad del concepto de infinito en las ciencias naturales.
2. Desmenuzar el concepto de infinito para tratar de despojarlo de (o al menos entender la causa de) las contradicciones y paradojas con que suele presentárselo en los cursos de matemáticas.
3. Analizar la influencia de los infinitos (o su ausencia) en las relaciones causa-efecto y su relación con un futuro pre-determinado.

… La tarea no es sencilla.

Pero hay muchas tareas aparentemente imposibles que vale la pena intentar. Ésa es una característica del espíritu humano. Y, a veces, aunque la tarea no se complete, en el camino podemos recoger frutos y experiencias que enriquecen nuestra manera de ver el mundo.

Algunos desarrollos no van a ser rigurosos.

A veces por desconocimiento, … a veces por decisión. ☺

Pero, confío en que algunas conclusiones y ejemplos motivarán al lector a revisar sus propios conceptos respecto al infinito y sus consecuencias.

Antecedentes

Entre mis primeros recuerdos sobre el concepto de infinito figura el uso que le dábamos con algunos amigos de infancia. Cuando nos ordenábamos de acuerdo a un número elegido por nosotros, para participar en una competencia, y alguno quería ser el último, recurría al "numero" infinito. Y no faltaba otro que inmediatamente dijera "infinito más uno", para quedar detrás del anterior.

Actualmente me resulta evidente que el esfuerzo que había hecho la maestra para enseñarnos el concepto de infinitud fue un completo fracaso.

Y por supuesto no fue culpa de nuestra maravillosa maestra de la escuela primaria.

La idea de infinitud no "entra" fácilmente (si es que alguna vez entra) en nuestras mentes finitas.

El recuerdo mencionado lo asocio con una edad cercana a los 8 ó 9 años (mi memoria rara vez logra ir mucho más atrás).

El recuerdo siguiente pertenece a una charla con mi padre, donde él intentaba darme datos que me permitieran comprender la enormidad del tamaño aceptado para el universo observable. Durante la conversación surgió la inevitable pregunta: ¿Dónde termina el Universo?

… y, si se termina… ¿Qué hay más allá?

Preguntas sin respuesta (y quizás sin sentido), pero que me abrieron la mente a algunas de las grandes incógnitas con las que viene luchando nuestra mente desde que los seres humanos tuvimos tiempo ocioso para preocuparnos no sólo por las necesidades cotidianas.

Y el último recuerdo importante ya pertenece al período universitario donde me enseñaron a tratar matemáticamente las cantidades infinitas y (¡oh sorpresa!) las trans-finitas.

… Finalmente había cosas más grandes que el infinito “vulgar” que creía haber aprendido en la escuela primaria.

Muchos años después (y lamentablemente ya no tengo a mi padre para conversar con él) algunas de todas estas cosas siguen dando vueltas por mi cabeza. Es un proceso contra el que no puedo ni quiero luchar. Pero, además, sigo sumando datos. Y entre las cosas que aprendí en el camino figura la diferencia entre la descripción matemática del mundo físico y el propio mundo físico.

Las matemáticas son una muy bella herramienta, pero a veces somos *más papistas que el Papa* en su empleo y creemos que las matemáticas son una realidad en sí mismas. Son varios los filósofos que han defendido la postura de que la Naturaleza está escrita en el lenguaje de las matemáticas.

En lo personal, alguna vez he escuchado, dicho con total solemnidad, que la realidad no se adapta a las matemáticas – ¡¿…?!

Con posterioridad me he encontrado, muchas veces, analizando el concepto de infinito y de continuo en diferentes contextos. Desde discusiones puramente filosóficas hasta situaciones derivadas de planteos tecnológicos.

La última vez (antes de la presente) que me encontré analizando críticamente estos conceptos fue bastante reciente. Esa vez estaba tratando de entender, con un grupo de amigos, el principio de causalidad (fenómenos causa-efecto), el libre albedrío y la irreversibilidad de los procesos naturales. En este capítulo sólo voy a mencionar algunas de las conclusiones a que arribé. Sólo aquellas que me atrevo a defender con argumentos que considero medianamente sólidos.

Después… algunos escarceos en foros de Internet y, ahora, cumpliendo con una especie de necesidad de poner en orden mis ideas.

… y, posiblemente, disfrutando del placer de desordenar las de otros. ☺

Planteo y discusiones generales

En alguna medida la discrepancia entre infinitos matemáticos e infinitos físicos deriva de la mayor “libertad” de que gozan las matemáticas para definir propiedades y conceptos sobre las entidades que manejan. La asignación de realidad física a los resultados matemáticos es un proceso que merece ser analizado toda vez que parezca necesario.

Nota*: Espero mostrar convincentemente que el infinito y el continuo son "entidades" estáticas e inabordables y, como tales, sin cabida en la física.*

Para empezar desde los orígenes debo resaltar que muchos conceptos aritméticos y geométricos se aceptan como "intuitivos". Tal es el caso de los conceptos de punto, recta y plano de la geometría euclidiana. De este modo se acepta que un "punto" no tiene dimensiones, y que una recta no tiene espesor y está formada por la alineación de infinitos puntos.

En este desarrollo quiero mostrar que estos conceptos "intuitivos" pueden conducir a inconsistencias físicas notables.

La forma tradicional, y casi "obligatoria", de introducir el concepto de infinito es a través de la sucesión de números naturales.

Cuando enseñamos a contar a nuestros hijos, el procedimiento es progresivo. Empezamos con 1,2,3 y, por un tiempo, nos detenemos en 10. A partir de ese punto, cuando se nos acaban los dedos de la mano, podemos seguir con los de los pies, con algunos dedos prestados y con objetos cotidianos…, hasta que en algún momento los números toman entidad propia.

Cuando el niño aprende a contar hasta mil, en general los números ya no necesitan de una entidad física que los respalde.

A partir de ese momento las matemáticas toman el poder. ☺

… Ya somos capaces de decir "un millón" (o escribir 1.000.000) sin que sea necesario aclarar "un millón de ¿qué?… simplemente "un millón".

Y sabemos que "dos millones" es más que "un millón" puesto que "dos" es más que "uno".

Nota*: Observemos, porque es significativo, que ahora el "¿Qué?" Se transformó en un número..., no en una entidad física.*

Es normal que, a esta altura de los acontecimientos, algunos niños experimenten cierta fascinación y comiencen a preguntar qué sigue después de muchos millones. Hasta que en algún momento aparece la pregunta inevitable. ¿Cuándo (o dónde) se terminan los números?

Y la respuesta típica es una afirmación del tipo:

- Los números (esta serie que llamamos números naturales) no se terminan.

O una versión "ampliada" de la misma:

- Los números no se terminan **nunca**.

No es trivial que agreguemos el adverbio de tiempo "nunca" en la definición pues el proceso de numeración implica un consumo de tiempo. Ese "nunca" no sólo hace referencia a que los números no pueden agotarse sino a que si nos dedicáramos a contar, sumando de a uno, de a mil, o por millones, nunca llegaríamos al límite superior para los números.

Se nos agotarían el papel, la tinta con que escribimos, los nombres de los números o el tiempo, pero no los números. ☺

Pregunta *(para la que no pido respuestas): ¿Me ha pasado sólo a mí o, tal vez alguno que otro de los ocasionales y amables lectores de estas líneas, siendo niño, se entretuvo alguna vez contando por el simple placer de contar y ver hasta dónde era capaz de llegar?*

Todo esto lo resumimos diciendo **hay** infinitos números naturales. O, más técnicamente, que los números naturales **son** o **forman** un conjunto infinito.

A esta altura quiero destacar algo que me animo a tildar de "primera intuición errónea" generada por esta forma, casi inevitable, de introducir el infinito. Esta metodología da la sensación de que, si bien no se puede terminar, al menos se puede empezar a trabajar con el infinito.

Y esto, como veremos, no se condice con la práctica posterior. ☹

Por el contrario, la situación típica, al enfrentar a los "verdaderos" infinitos (debería decir "situación obligatoria", pero momentáneamente quiero dejar una ventana abierta) es la que se presenta, por ejemplo, si intentamos contar los números naturales "de atrás hacia delante".

… Imposible, claro. ☺

Pero, … pensemos un poco…

¿Dónde está la diferencia?

¿Por qué podemos empezar desde un extremo de los números naturales, pero no desde el otro extremo?

Bien…, es el momento de aplicar el tercero de mis axiomas personales. Casi seguramente, en este caso, estoy haciendo una pregunta equivocada (del tipo… “¿Cuál es el estado civil del número 3?”).

Cuando nos detenemos a preguntarnos cómo es posible que una pregunta esté equivocada (y no su respuesta), lo que descubrimos a continuación es que hemos dado por sentado algo que es insostenible.

Posiblemente no haya “dos extremos” en los números naturales. Al menos NO dos extremos similares.

Entonces, posiblemente la pregunta deba ser otra

… ¿Por qué los dos extremos son diferentes?

Y ahora, si esta pregunta es del tipo aceptable, podremos avanzar. ☺

Y esta pregunta creo que es aceptable. O, por lo menos admite una respuesta simple.

Un extremo se puede procesar (fabricar / construir / recorrer /… contar) en tanto que el otro extremo sólo se lo puede tomar por “definición”. El extremo superior se lo toma ya construido. No se lo puede construir, recorrer, contar, etc.

En pocas palabras… tenemos un extremo operable (en el sentido en que se pueden hacer cosas con él) y un extremo “infinito”.

Y esto es un buen resumen anticipatorio de lo que sigue en estos desarrollos. Como veremos con mucho más detalle, los infinitos **no se construyen**. Sólo se los puede definir como algo que existe.

En forma simplificada diría que el error cometido en la introducción conceptual de los infinitos mediante el proceso de contar, es el de sugerir que partiendo de un extremo operativo (posible de recorrer) se puede llegar al infinito.

Quizás, a esta altura, se comience a entender mejor por qué se afirma que “infinito **no es** un número muy grande”.

Infinito es algo diferente. No sé qué es, … pero con certeza no es un número.

Entonces… ¿Por qué se transmite la imagen de que contando se puede acceder al concepto de infinito?

Tampoco lo sé. Pero presiento que esa idea intuitiva es la responsable de muchos inconvenientes conceptuales posteriores.

En realidad las expresiones anteriores contienen algún tipo de falacia, puesto que en rigor de verdad no hemos demostrado que hay infinitos números naturales.

… Simplemente nos hemos cansado de contar. ☺

Si hiciéramos el mismo tipo de operación con los granos de arena de una playa, también nos cansaríamos de contar (con total certeza) pero no concluiríamos que en la playa hay infinitos granos de arena. En este caso diríamos que hay innumerables (no conocemos el número) o incontables (nos cansamos de contar) granos de arena, pero estaríamos seguros de que no hay infinita cantidad de ellos.

***Nota**: Este tema fue abordado con total claridad en “El Arenario” por el increíble genio matemático de Arquímedes.*

¿Dónde está, entonces, la diferencia entre “innumerables”, “incontables” e “infinita cantidad”?

Como menciono repetidas veces, las diferencias tienen su raíz en las discrepancias irreductibles que existen entre la física de objetos reales y las matemáticas del continuo.

Veamos, entonces, una manera diferente (basada en conceptos físicos) de llegar al concepto de infinito.

… o de demostrar que no se puede llegar. ☺

Si me dispongo a llenar una pileta de 10.000 litros empleando un balde de 10 litros, es evidente que, en el caso ideal en que no hay derrames ni evaporación, podré completar la tarea luego de transportar y verter 1.000 baldes.

Ésta parece una tarea pesada, pero no imposible.

1.000 baldes es una cantidad grande de baldes, pero la tarea es realizable.

Ahora bien, si cada balde lo lleno sólo con la décima parte de su capacidad (1 litro), deberé realizar 10.000 transportes para completar la tarea. Y si en cada balde transporto sólo 1 cm3 deberé realizar 10.000.000 de viajes para llenar la pileta.

10.000.000 de viajes (1 x 10^7 viajes) son muchos, pero todavía es una cantidad que nuestra mente puede manejar.

Nota*: A modo de ejemplo, durante una lluvia, que registra 10 mm en un pluviómetro, en una hectárea de terreno caen algo así como 100.000 litros de agua y, asumiendo que 20 gotas corresponden a 1* cm^3*, esto representa 2.000.000.000 de gotas (2 x* 10^9 *gotas). En otras palabras, la Naturaleza "acarrea" cotidianamente muchas más gotas que las mencionadas en el ejemplo de la pileta.*

En teoría puedo continuar con el razonamiento, y decir que si en cada balde transporto 0,000001 litros (10^{-6} litros) necesitaré 10^{10} viajes.

Y si transporto 10^{-20} litros en cada balde (cerca de un millón de moléculas de agua en cada viaje), necesitaré 10^{24} viajes (y muchas vidas) para lograr la tarea.

Bien, suponiendo que continúo reduciendo el volumen transportado en cada viaje, puedo hacer crecer indefinidamente el número de viajes necesarios para realizar el llenado.

De este modo, da la impresión de que puedo reducir el volumen hasta que sea necesario un número infinito de viajes.

¿Correcto?

¿…?

¡Absolutamente Falso!

Con infinitos baldes vacíos no puedo llenar la pileta, ni ningún otro recipiente. Y si cada balde transporta algo, con un número finito de pasos (por muchos que sean) puedo completar la tarea.

La diferencia entre un balde vacío y un balde con algo no es una diferencia cuantitativa. En este caso se trata de diferencia cualitativa. No se trata de tener más agua en un caso que en el otro. Se trata de "tener… o no tener, … esa es la cuestión". ☺

***Nota**: Perdón Sir William*

Lo mismo pasa con la recta y el punto. Si el punto no tiene espesor en ninguna de las dimensiones, infinitos puntos siguen sin tener espesor. Del mismo modo, infinitos baldes vacíos tienen "tanta" agua como un solo balde vacío.

Nada impide que matemáticamente se genere un resultado donde se obtiene que la suma de infinitos ceros es igual a 1 (ó a 10, o cualquier otro número). El problema consiste en asumir que ese modelo matemático se aplica a la realidad física.

Más aún. Se puede decir que una pileta vacía está "llena" de infinitos baldes vacíos.

Pero, pese a que esta afirmación tiene apariencia de expresión física (emplea términos que connotan elementos cotidianos), en realidad es sólo una afirmación matemática.

***Nota**: El lector puede tratar de imaginar cómo recoger y transportar un balde vacío de los muchos que "llenan" la pileta.*

Para apreciarlo desde un ángulo más práctico, supongo que se entiende fácilmente que carece de sentido físico "llenar" una pileta volcando baldes vacíos en ella.

De alguna forma hemos llegado a un resultado que permite entender una expresión previa.

Podemos decir que una pileta vacía contiene infinitos baldes vacíos (expresión matemática que no indica un proceso de llenado), pero carece de sentido la acción física de "llenar" esa pileta con baldes vacíos.

Esta es la raíz (desde mi punto de vista, claro) de algunas interpretaciones físicas problemáticas. Cualquier objeto real (en el sentido de realidad física) puede contener sólo una cantidad finita de entes primarios. Se pueden postular segmentos con infinitos puntos, pero, si trasladamos esa idea al mundo físico, le estamos abriendo las puertas a las paradojas planteando postulados que, como veremos, conducen a notables contradicciones.

Operando con el infinito

Veamos la demostración "oficial" de que existen tantos números pares como números enteros.

Para esto puedo recurrir a diferentes fuentes, pero voy a recurrir a una fuente especial porque se trata de un autor que pretende (y es reconocido por) describir el mundo físico. Y no sólo una parte del mundo físico, sino el propio Universo.

El texto es el siguiente:

"...Es fácil mostrar que las colecciones infinitas son concebibles. Si consideramos la colección formada por todos los números enteros imaginables, tendremos una colección infinita. Es ésta, además, la más simple de las colecciones infinitas que consideran los matemáticos. Como parte de esta colección, podemos considerar aquella que se obtiene suprimiendo todos los números pares. El conjunto de los números pares es una parte del conjunto de la de los números enteros; y, sin embargo, esta parte es igual al todo. Puesto que se puede establecer una correspondencia perfecta entre los elementos del conjunto de los números pares e impares. Basta con hacer corresponder a cada número entero su doble, en la serie de los números pares. A cada número par corresponde un solo número par o impar, su mitad, y recíprocamente. Según se desprende de la definición de igualdad de dos colecciones, la colección total y la colección parcial son iguales. Hay tantos números pares como números enteros pares o impares...".

El texto pertenece a la obra "***Cosmogonía** –Hipótesis del átomo primitivo*" del Abate **G. Lamaitre**. Y yo lo tomé de la traducción al castellano correspondiente a la publicación hecha en el año 1948 por Editorial Ibero Americana.

Observaciones y comentarios

- ¿Realmente es posible creer que se pueden imaginar **todos** los números enteros? ¿Para imaginar no es necesario realizar algún tipo de representación mental?

  ¿Se agotan los números enteros antes que la imaginación?

¿La propia palabra "**todos**", no transmite un concepto falaz cuando se aplica al infinito?

- La frase "*Basta con hacer corresponder a cada número entero su doble, en la serie de los números pares*" es una frase operativa en el sentido que indica una acción. Poner en correspondencia o "hacer corresponder" implica relacionar un elemento de un conjunto con un elemento del otro conjunto.

Veamos… el 1 con el 2; el 2 con el 4, el 3 con 6, el 4 con el 8… Y así siguiendo.

Pero… ¿Hasta cuándo? ¿No hay algo erróneo en decir que se comienza un proceso interminable para luego darlo por terminado? Si se comienza a poner en correspondencia los elementos de ambos conjuntos no se puede terminar de poner en correspondencia puesto que se trata de un proceso inacabable. Lo que sí se puede hacer es establecer (por definición) que hay tantos números pares como números enteros. Se trata simplemente de una definición o axioma aplicable a estos conjuntos infinitos. Pero no debe sorprendernos que si aceptamos este axioma, comiencen a aparecer paradojas al pretender que la lógica a asociada a ellos represente el mundo físico.

- La frase "Hay tantos números pares como números enteros pares o impares" merece un análisis especial. El concepto "tantos" se aplica a una cantidad, en este caso de números. Al aplicarlo a un conjunto infinito ¿no se está poniendo al infinito en el "status" de un número?

Bueno, quiero aclarar que esto no es un "ataque" personalizado a las ideas del abate Lamaitre. Cualquier texto que trate con comparaciones entre conjuntos infinitos se toma las mismas "libertades".

En 1632, en sus "*Diálogos sobre los dos sistemas máximos del mundo*" Galileo, al mencionar el tema del infinito, pone en boca de uno de sus personajes, Sagredo, la siguiente pregunta: *"¿Hay más números que cuadrados?".*

El mismo personaje sugiere que la respuesta debe ser positiva puesto que algunos números naturales no son cuadrados perfectos de otros números. Pero otro personaje ficticio, Salviati, responde que a cada número se lo puede vincular con su cuadrado (El 1 con el propio 1; el 2 con el

4; el 3 con el 9; …; el 20 con el 400; …). Y, con este punto de vista hay tantos cuadrados como números naturales.

En forma más general, los libros de matemáticas expresan, en forma simbólica:

- N x Infinito = Infinito

Donde N representa cualquier número natural.

Por supuesto que esto puede definirse (y así se hace) como axioma matemático para el trabajo con infinitos. Sin embargo, si se recurre a los orígenes de las matemáticas (cuando la vinculación con las ciencias naturales era más firme), en la expresión anterior se puede apreciar una alteración sutil (o no tanto) de las reglas de juego que se aceptaron al definir el concepto de multiplicación.

La multiplicación no es más que una suma generalizada. Multiplicar por "N" es una forma abreviada de sumar "N" veces la misma entidad. Por lo tanto, la expresión "N x Infinito" no es más que la suma de "N" infinitos.

Con la salvedad de que la suma es una **operación** matemática. Una suma no se resuelve por definición, sino operando con los sumandos.

La mecánica de trabajo (la forma de hacer la operación) se define. Pero la suma es una tarea a realizar

Veamos un ejemplo. Si queremos sumar 43.917 y 3.506.318, no recurrimos a un libro para buscar el resultado ya establecido para esta operación. En la práctica, manualmente o con ayuda de los omnipresentes ordenadores, **hacemos** la suma, siguiendo el procedimiento preestablecido.

Lo que no debemos olvidar es que, detrás de la operación mecanizada por años de práctica o por equipos automáticos, lo que subyace es la acumulación de objetos. **Sumar** es **acumular**, **juntar**, **incorporar**, **añadir**, **anexar**, etc.

Sumar 10 caramelos + 20 caramelos es una operación que resume, por ejemplo, la acción de juntar el contenido de dos bolsas con caramelos.

Y pido perdón por lo extenso que estoy haciendo algo que es tan trivial que ya no lo analizamos cada vez que hacemos una suma.

Bueno, justamente por eso lo estoy haciendo extenso. Por lo difícil que resulta borrar todo el condicionamiento adquirido.

Una vez que llegamos a lo esencial de una suma (la acumulación de entidades) se puede entender la falacia implícita en el concepto de sumar dos infinitos.

En estos casos es imposible aplicar las reglas de suma o hacer la acumulación paso a paso (la suma de "palotes" que aprendemos en las primeras etapas de nuestro aprendizaje de las matemáticas).

La suma de infinitos sólo puede definirse.

… no puede hacerse. ☹

Cuando escribimos:

- Infinito + N = Infinito
- Infinito x N = Infinito

Da la sensación de que estamos haciendo algo parecido a lo que hacemos en las operaciones matemáticas convencionales.

Por supuesto que los textos de matemáticas aclaran que las operaciones indicadas son sólo definiciones para operar con el infinito. Otra vez quiero resaltar que no me opongo a las matemáticas; sólo llamo la atención sobre el hecho de que lo que se está haciendo no es *más de lo mismo* que ya habíamos aprendido.

Cuando decimos que "algo" es lo mismo que 10 veces ese mismo "algo" estamos introduciendo una entidad que no tiene correlato en el mundo físico. Además lo hacemos por definición y no por demostración a partir de reglas conocidas.

En resumen, el lenguaje y la costumbre han evolucionado tanto que en la actualidad podemos pensar que una suma es una definición. De hecho podemos trabajarla de esa forma. Lo que yo quiero resaltar es que, al hacer eso, estamos retirando el fundamento que vinculaba las matemáticas con su aplicación al mundo real.

Veamos otro ejemplo para demostrar que el infinito no es un número.

Imaginemos que una hormiga está caminando sobre un dibujo del símbolo de infinito ("∞") y quiere salir del mismo recorriéndolo paso a paso.

Después de dar una vuelta, la pobre hormiga no llega al extremo, sino que vuelve al mismo punto donde inició el recorrido.

Después de 1.000.000 de vueltas, ella sigue tan lejos de la salida como después de la primera vuelta.

Eso es lo que queremos expresar cuando decimos que el número más grande que podamos imaginar está tan lejos de infinito como el número “1”. Por más que la hormiga siga dando vueltas, no mejoran sus posibilidades de terminar el recorrido.

Más aún, tampoco le sirve caminar más rápido. ☺

Bueno, … quizás ahora se pueda apreciar por qué carece de sentido decir que la hormiga debe dar infinitas vueltas para terminar el recorrido.

Dando un número finito de vueltas no va a encontrar la salida. Entonces cabe preguntar:

¿Qué propiedad tiene el infinito que genera una salida cuando no la hay?

… Otra pregunta que no debe hacerse, claro. ☺

La respuesta está íntimamente relacionada al mensaje principal de este capítulo.

Aunque quizás todavía cueste hacer la conexión, cuando decimos que hay infinitos números naturales cometemos la misma falacia que cuando decimos que la hormiga debe realizar infinitas vueltas para salir de su “trampa”.

El símbolo de infinito no tiene un extremo, del mismo modo que los números naturales no tienen final. No hay un último número natural.

Por lo tanto al decir que hay infinitos números naturales cometemos una falacia.

… pero no por emplear la palabra “infinito” sino por usar la palabra “**hay**”.

No *hay* infinitos números naturales como *tampoco hay* salida del símbolo de infinito.

Infinitos de órdenes superiores

¿Puede haber infinitos más grandes que otros infinitos?

Bueno… no exactamente "más grandes" sino de un orden de infinitud superior.

La respuesta oficial es **¡SÍ!**… por extraño que parezca a todo aquel que escucha esto por primera vez.

Pero, no es mi respuesta, como seguramente no sorprenderá a todos los que hayan leído lo escrito hasta este punto.

El caso de los infinitos de diferente orden entra dentro de las limitaciones que impone el tercero de mis axiomas personales. Se trataría, simplemente, de un planteo inadecuado.

Si, de alguna forma, primero se llega a la conclusión de que existe algo inabarcable y después se encuentra algo más inabarcable todavía, existen razonables motivos para sospechar de la validez de alguno de los axiomas o de los razonamientos empleados.

Por favor… no voy a oponerme a que los matemáticos hagan y escriban maravillas con los infinitos de órdenes superiores. Las matemáticas, una vez que establecen las reglas de juego… son exactamente eso… ¡un juego! Y, con qué derecho yo intentaría impedir que otros jueguen con sus juguetes favoritos. ☺

Sólo sostengo que si el concepto de infinito es inaplicable a la física, los infinitos de órdenes superiores tienen órdenes de inaplicabilidad también superiores.

En base a lo que hemos analizado hasta este punto, lo que sí podemos afirmar es que los números naturales son **inagotables**. Pero si después afirmamos que esa fuente inagotable se puede encerrar en una especie de "bolsa" mediante la palabra "hay", no es imposible que se esté cometiendo algún tipo de error.

Cuando decimos "hay" es porque el proceso de acumulación (cualquiera sea al que hacemos referencia) ya terminó.

Si el proceso no se hubiera terminado, diríamos "habrá" ¿verdad?

En realidad, a eso se reduce todo el problema conceptual de los infinitos. Los problemas surgen a partir de que se da por terminado un proceso interminable.

Y como se plantea una tarea no realizable y se dice que se realizó, se genera automáticamente la paradoja.

Nota*: Como veremos con algo de detalle, las matemáticas de funciones continuas incluyen el concepto de infinito.*

En muchos desarrollos que involucran infinitos, luego de mostrar un mecanismo de trabajo, la operación se generaliza diciendo algo así como: *"...Evidentemente mediante este proceso se llega a..."*.

La falacia de esta afirmación final radica en que asume que un procedimiento interminable puede terminarse.

Y si uno acepta que el proceso se completa, de alguna manera está introduciendo una paradoja. Esta paradoja es la que permite hablar de infinitos mayores que otros, pues al aceptar que un conjunto infinito es numerable, es posible encontrar un "infinito" de mayor jerarquía.

Veamos con más detalle la falacia de este razonamiento.

Ya hice notar que el infinito no se construye. Nadie puede "amontonar" de a uno, o de a millones por vez, infinitos componentes.

El infinito se define.

De esa forma nadie construye un segmento "apilando" puntos adimensionales, sino que se toma un segmento y se dice, por ejemplo "*acá tenemos infinitos puntos*".

En esta simple observación radica la explicación de por qué resultan diferentes el infinito número de números naturales y el infinito número de números reales que hay entre, por ejemplo, el "cero" y el "uno".

¿Por qué no podemos poner en correspondencia los números naturales con los números incluidos en ese "pequeño" segmento numérico? O, dicho de otra forma ¿Por qué no podemos contar, como hacemos con los números naturales, los infinitos puntos de un segmento?

Por la simple razón que a los números naturales los definimos por enumeración (contar **es** un proceso físico) en tanto que a los números reales los definimos "de facto".

… **¡Allí están!**

Trato de explicarme mejor. Cuando tratamos de mostrar o explicar que hay infinitos números naturales, decimos algo así como "*1; 2; 3; 4; 5; ... 100; 101; ... 1.000.000; 1.000.001; ... y así hasta el infinito*".

Es una tarea que empezamos a hacer y, como de costumbre, damos por terminada… aunque es interminable. La expresión *"...y así hasta el infinito*" es una falacia en el sentido pleno de esta palabra.

Pero, en el caso de los números reales no se inicia la enumeración. Simplemente se dice algo así como "entre "cero" y "uno" hay (**¡Hay!**… y también **¡Ay!**) infinitos números reales.

Pregunta: ¿Quién identificó esos infinitos números?

Respuesta: Nadie. Los números reales simplemente existen.

Repregunta: Ah! Y cómo sé que hay infinitos números reales si nadie los identificó.

Parece una pregunta tonta. ☹

Respuesta: En realidad nadie puede identificar los infinitos números reales de los que hablamos, sencillamente porque es imposible establecer, con sus infinitas cifras, ni tan siquiera uno sólo de esos números.

Queja: No… No puede ser que no se pueda identificar un solo número. Entiendo que no se pueda identificar infinitos números, pero un solo número debiera ser una tarea simple.

Respuesta: Bueno… hagamos la prueba. Identifiquemos, por ejemplo, el primer número real mayor que "cero".

… ¡¿?!

Atención (Es muy importante leer lo que sigue).

Si algún matemático estuviera leyendo estos escritos, en este momento podría estar caminando por las paredes por la sarta de "burradas" que me he animado a escribir en los párrafos previos.

Pero yo no escribo para los matemáticos.

Yo escribo para gente que, como yo, debe poseer estudios de matemáticas en diferente grado, pero que no es matemático profesional.

Y, si pese a mis “burradas”, estos lectores “comunes”, han creído ver algo de interés en lo que he escrito, eso puede ser un indicio de que cuando creen que entienden los usos de las matemáticas asociadas a cantidades infinitas… tal vez no tengan muy claro la validez de dicho uso.

Y, eso es lo que quiero mostrar, o poner en entredicho: La aplicación de las matemáticas del infinito a las ciencias naturales

Y eso nos remonta a los antiguos griegos.

***Nota**: No he perdido el hilo del desarrollo, ... más adelante continúo analizando la imposibilidad de identificar tan sólo un número real. Sólo suspendo el desarrollo porque se trata de un tema tan significativo que merece un apartado especial.*

Los Griegos y el infinito

Ya es hora de traer a escena a algunos de los primeros pensadores cuyos análisis del infinito trascendieron hasta nuestros días.

Para este fin voy a emplear mis propias palabras, voy a introducir algunos ejemplos modernos acompañando los originales de estos autores, y me voy a tomar algunas licencias interpretativas para usar las ideas de estos pensadores de acuerdo con los fines de este capítulo.

Espero mantener la fidelidad conceptual del relato. La historia más detallada está disponible en libros especializados y de divulgación y, actualmente, en innumerables sitios web.

Entre los numerosos pensadores griegos sólo voy a seleccionar a dos, que representan dos escuelas de pensamiento diferentes. Tan diferentes que resultan complementarias.

Estos dos filósofos son Demócrito de Abdera y Zenón de Elea.

El nombre del primero se asocia a la introducción del concepto de “átomos” como piezas primarias e indivisibles, necesarias para la existencia del mundo físico. A Zenón se lo asocia a una serie de paradojas destinadas a demostrar ciertas contradicciones en el movimiento de objetos y seres vivientes.

***Nota**: El hecho de personalizar los argumentos en estos dos pensadores no quiere decir que atribuyo sólo a ellos, las ideas que voy a* *exponer. Cada uno de estos pensadores formó parte de escuelas de pensamiento a la que contribuyeron numerosos filósofos. La personalización de los argumentos tiene por objeto facilitar la exposición de los temas. Más aún, es muy difícil situarse mentalmente en una época en que todos los desarrollos del cálculo y la geometría actuales estaban recién echando sus primeras raíces, de modo que, ... como ya dije, algunos argumentos son sólo interpretaciones mías que considero acordes con las ideas de estos filósofos*

El argumento de Demócrito

Demócrito llegó a la conclusión de que los objetos materiales deben estar formados por partículas indivisibles, no por la vía experimental directa, sino por la vía de la observación de la Naturaleza y del razonamiento lógico.

Sin embargo, he observado que muchos pensadores actuales no entienden cabalmente (o, simplemente, no aceptan) los argumentos esgrimidos por Demócrito. Por esta razón ahora voy a exponer algunos argumentos y después voy a volver con aplicaciones que espero que ayuden a clarificarlos.

A la escuela de Demócrito se atribuyen expresiones del tipo.

"Nada sucede por azar. Todo ocurre de acuerdo a razón y por necesidad".

"Nada puede ser creado de la nada, ni puede ser destruido y reducido a nada".

Este último pensamiento es la base del pensamiento "atomista". En términos propios yo trascribiría la primera parte de esta frase, de la siguiente forma: No se puede crear "algo" sumando "nadas".

Otra forma de expresar la necesidad de un límite a la división de la materia es la siguiente: Si la materia fuera infinitamente divisible podría ser sometida a una desintegración total y, de esa desintegración, no podría volver a restituirse la materia.

Este último argumento puede resultar un tanto oscuro en este momento, pero volveré sobre él con ayuda de los argumentos de Zenón y las series matemáticas asociadas a sus paradojas.

Las paradojas de Zenón

Como ya dije, Zenón es famoso por proveer argumentos vinculados a la imposibilidad de ocurrencia de cosas que, no obstante, ocurren. De ahí que a estos argumentos se los agrupe bajo el título de "paradojas de Zenón".

Sus planteos fueron varios, pero todos responden a un patrón común. En todos los casos se analizan series o situaciones que implican infinitos pasos.

En este capítulo voy a emplear sólo dos de sus paradojas.

La flecha y el árbol

Imaginemos un arquero que está a una cierta distancia "d" de un árbol.

En determinado momento, el arquero lanza una flecha, tratando de impactar en el árbol.

La flecha, para llegar al árbol, tiene que recorrer un camino que Zenón divide en mitades sucesivas. De este modo la primera mitad de la distancia que separa al arquero del árbol, es "d/2", y la flecha tardará un determinado tiempo en hacer el recorrido.

Una vez llegada a ese punto, la flecha continúa su viaje y para ello debe recorrer primero la mitad de la distancia faltante ("d/4").

Y, una vez en su nueva posición también deberá recorrer la mitad de la distancia restante ("d/8") antes de llegar a su objetivo.

… Y así siguiendo.

Permanentemente la flecha debe recorrer la mitad de lo que falta, antes de completar el recorrido

De este modo, la flecha nunca llegará al árbol pues continuamente tiene tarea por hacer.

***Nota**: Es posible utilizar este razonamiento, de forma análoga, para "demostrar" que la flecha nunca llegará a salir del arco.*

Este análisis muestra que, si el recorrido es un "continuo", la cantidad de etapas recorridas por la flecha es infinita.

"Solución" de la paradoja

Muchos años después, y con la ayuda de herramientas de cálculo no disponibles en la época de Zenón, los libros de matemáticas presentan la "solución" a esta paradoja.

El argumento es "simple". La serie incluye infinitos pasos, pero su suma es finita y por tanto la flecha llega al árbol.

En otras palabras, se puede demostrar que la suma de series como la generada en esta paradoja, es un número finito, aunque la serie esté formada por infinitos términos.

Lo malo es que esa "solución" incluye sólo la demostración de que las infinitas etapas del recorrido dan un número finito.

… ¡Pero eso no podía ser ignorado por Zenón!

Si alguien le hubiera preguntado a Zenón cuánto suma la serie

d/2 + d/4 + d/8 + d/16+… hasta el infinito

No creo que hubiera tenido dudas en razonar que esa suma da exactamente "d".

Pero **no** porque Zenón supiera hacer una suma de series infinitas. Sino simplemente porque esa serie se obtuvo dividiendo, por mitades, la distancia "d". ☺

Por favor, … se pueden dudar muchas cosas de la vida de Zenón, pero no se puede dudar que era un pensador de primera línea, cuyos razonamientos siguen siendo motivo de análisis, más de 2.000 años después que los expresara.

Hay que ser muy ingenuo para pensar que Zenón hubiera creído que sumando las partes en que divide "algo", hubiera obtenido algo diferente a ese "algo".

Una cosa es no conocer las matemáticas actuales y otra muy diferente es no saber razonar. ☹

De modo que la actual "solución" de la paradoja de Zenón no es una tal solución. Demostrar que la suma de los intervalos es finita, o que la suma de tiempos empleados también lo es, no ataca el fundamento de la paradoja.

Y el fundamento es muy simple. Lo que planteó Zenón es que el recorrido incluye infinitas etapas.

Y recorrer infinitas etapas es una tarea imposible.

Como también lo es contar hasta el "último" número natural.

… por muy rápido que se pretenda contar.

De alguna forma la "solución" actual de la paradoja de Zenón afirma que es lo mismo **calcular** la suma de una serie infinita, que **hacer** una suma infinita.

Y un recorrido físico **se hace**.

Un recorrido físico **no se calcula.**

Si la flecha debe alcanzar el árbol, no alcanza con que **calculemos** cuál es la distancia que debe recorrer.

La flecha debe **recorrer** la distancia. Y en el recorrido debe acumular (sumar) infinitas mitades.

¡No alcanza con **calcular** cuánto suman esas mitades!

La flecha inmóvil

Esta paradoja también es conocida por "demostrar" la imposibilidad del movimiento

Para esta demostración en vez de emplear el desarrollo de Zenón, voy a actualizar sus argumentos para aprovechar la tecnología actual.

Todos hemos visto películas en las que la sensación de movimiento se logra proyectando imágenes sobre una pantalla.

En una película de este tipo, el movimiento se obtiene mediante la proyección secuencial de un número finito de imágenes por segundo. Cada imagen está "congelada" (es un "cuadro"), pero el pasaje de unos 30 cuadros por segundo produce la sensación de movimiento

Ahora bien, teniendo en cuenta este mecanismo, imaginemos que queremos proyectar una película en que haya infinitos cuadros entre uno y otro cualquiera.

…

… ¡Es imposible avanzar!

Cada vez que queremos pasar a la escena siguiente, aparecen nuevos cuadros intermedios.

En una película así, la imagen en la pantalla de cine permanecería estática, por muy rápido que quisiéramos hacer la proyección. De hecho, si lográramos pasar de una escena inicial a otra diferente, significa que habríamos pasado por las infinitas posiciones intermedias entre el primer cuadro y el que presenta la diferencia.

Otra vez estaríamos afirmando que hemos sido capaces de terminar con una tarea interminable.

Cualquier "solución" moderna de esta paradoja emplea los mismos mecanismos que se mencionan en este desarrollo. Se plantea una tarea imposible de terminar… y se la da por terminada. ☹

Pero… entonces ¿Cómo se resuelven estas paradojas?

Es sencillo, …

… Recurriendo a Demócrito. ☺

En todos los planteos de Zenón se asume la existencia de infinitos pasos intermedios (un continuo). Si se elimina la necesidad de dar infinitos pasos intermedios, las paradojas se desvanecen.

Las películas de cine se pueden proyectar y producen la ilusión de movimiento, simplemente porque cada cuadro es diferente al anterior. No hay infinitas etapas intermedias entre un cuadro y el siguiente.

En alguna medida Zenón estaba diciendo lo mismo que Demócrito.

Demócrito afirmaba que para que las cosas existan, la subdivisión de los entes materiales debe tener un límite.

Zenón afirmaba que si la subdivisión puede extenderse hasta el infinito, el movimiento (cambio) es imposible.

Dos caras de la misma moneda.

Y la ciencia actual no hace más que comprobar una y otra vez que toda subdivisión tiene un límite. No hay ente material (excepto todo aquél que se declara oportunamente como constituyente último de la materia) que no esté formado por cantidades finitas de constituyentes discretos.

Dos extremos de la misma idea

Volvamos a la serie de Zenón.

Si tomamos el valor de “d” como unitario, la serie de Zenón describiendo el avance de la flecha desde el arco hacia el árbol, adopta la forma

1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16+… +… hasta el infinito

Sabemos, gracias a las matemáticas que nos permiten calcular la suma de una serie como ésta, que la “suma” de esos infinitos términos es “1”.

Pero… hagamos el intento de hacer la suma empezando por el otro extremo de la serie.

No pretendo hacer la suma. Mi intención se reduce, simplemente, a indicar la suma de recorridos parciales de la flecha, desde el árbol hacia el arco.

…

Probemos

…

¡¿?!

… no parece fácil ¿verdad?

Bueno… en realidad es imposible.

Pretender iniciar la suma de esta serie desde el otro extremo, es como pretender enumerar los números naturales, en forma regresiva, comenzando desde el más grande.

Quizás ahora podamos entender mejor el argumento de Demócrito.

Si algo de desmenuza hasta el infinito, después resulta imposible volver a reconstruirlo. Y el extremo “superior” de la serie de Zenón es una especie de desintegración hasta el infinito. De otro modo habría un último término de la serie y, otra vez, Demócrito hubiera ganado la contienda.

En consecuencia, si las cosas existen, es porque se han formado a partir de entes finitos.

Muy pequeños… pero de algún tamaño finito.

Debemos recordar que si bien los griegos no desarrollaron una ciencia experimental en los términos que la concebimos en la actualidad, fueron excelentes observadores de la naturaleza. Y entre las numerosas observaciones que citan sus textos figuran las menciones a la evaporación del agua, al desgaste de las rocas por acción del agua, de los pasos de los seres humanos o por el beso de innumerables labios en las estatuas de mármol. Todas estas observaciones remiten a la conclusión que la materia se divide en cosas muy pequeñas, inobservables para el observador de vista más aguda.

Pero la materia no se pierde, como lo demuestra la condensación del agua a partir de su vapor.

Muy pequeñas piezas, que pueden separarse, pero no se destruyen. O sea…

"Nada puede ser creado de la nada, ni puede ser destruido y reducido a nada".

Un comentario sobre las series infinitas

He visto afirmar repetidas veces, que el argumento de Demócrito, acerca de la necesidad de que todo esté compuesto de entidades primarias finitas, no es suficiente para demostrar la existencia de átomos.

En otras palabras, el universo puede estar formado por entes indivisibles de tamaño finito o por entes infinitamente pequeños (sin límite en cuanto a lo pequeño)

Conforme a la corriente de pensamiento dominante, existirían argumentos a favor de ambas posturas, por lo que es imposible, excepto mediante mediciones experimentales, establecer la verdad o falsedad de ambas hipótesis.

Como argumentación acerca de que es posible que exista el continuo, o, lo que es lo mismo, que los constituyentes últimos de la materia no tengan un tamaño finito, suele presentarse el caso de las series infinitas cuya suma da un valor finito. Éste sería un ejemplo contundente de que algo finito puede estar formado por infinitas "piezas".

Pero analicemos estas "sumas" recurriendo a la serie de Zenón

1/2 + 1/4 + 1/8 +… hasta el infinito

Observemos un detalle **¡fundamental**!

Los términos de la serie son todos diferentes.

… Y no puede ser de otra manera.

No existe ninguna serie matemática, formada por infinitos elementos idénticos distintos de cero, cuya suma arroje un resultado finito.

Imaginemos ahora un trozo de hierro.

Si admitimos que tiene constituyentes más pequeños (cosa sugerida por el desgaste de un trozo de hierro al someterlo a sucesivos roces), ¿Por qué esos constituyentes serían diferentes unos de otros?

No sabemos qué tamaño tienen esos constituyentes, pero es absolutamente insostenible que cambien de tamaño a lo largo de una barra de hierro. Después de todo, el desgaste puede empezar por cualquier extremo de la barra.

Entonces tenemos dos opciones

- Esos constituyentes no tienen tamaño
- Esos constituyentes tienen un tamaño finito.

… No hay terceras opciones.

En el primer caso, cualquier suma de ceros, da "cero". Recordemos que por muchos baldes vacíos que volquemos en una pileta, esta no puede llenarse de agua.

En el segundo caso el resultado de la suma "es" infinito.

La única solución posible es la de Demócrito. La barra de hierro sólo puede estar formada por un número finito de entidades idénticas de tamaño finito.

Bueno, … en la actualidad, a esas entidades las llamamos átomos de hierro. ☺

Y si queremos profundizar un poco más, los átomos de hierro también están formados por un número finito de otras entidades finitas.

Pero el argumento de Demócrito continúa en pie.

Otra vez el argumento de Demócrito

Creo que vale la pena insistir en este tema presentando el argumento de Demócrito desde una nueva perspectiva.

No pretendo decir que Demócrito razonó de la forma que voy a exponer. Sólo estoy tratando de explicar, desde otro ángulo, su razonamiento.

Veamos: Muchas magnitudes físicas se obtienen (o definen) como relación de otras dos, o más, magnitudes físicas.

Por ejemplo: La densidad.

La densidad es el cociente entre la masa y el volumen de un cuerpo.

En sistemas homogéneos, es una típica propiedad intensiva. La densidad del agua no depende de si hablamos de un gramo o de una tonelada de agua.

A continuación vamos a tratar de emular el pensamiento de los antiguos griegos, de modo que olvidaremos, momentáneamente, que conocemos la teoría atómica actual.

Imaginemos, entonces, que los objetos materiales son continuos.

La pregunta es la siguiente:

En este escenario ¿Tiene sentido hablar de la densidad de un punto?

Estoy hablando, por supuesto, de un punto "Euclidiano", o sea, un punto sin dimensiones.

Un punto no tiene ni masa ni volumen… por lo tanto carece de sentido hablar de la densidad del punto ¿verdad?

Bien, el argumento de Demócrito vendría a ser algo así como que es imposible que algo denso esté formado por entidades que no tienen densidad.

… ☺

Los Números Reales no existen

A lo largo de mi vida he hecho muchas aseveraciones contrapuestas a lo que podríamos calificar como "el saber establecido".

Pero ésta ya parece una exageración.

… incluso para mis estándares. ☺

De modo que voy a corregir lo que dice el título previo.

Diré, como ya he hecho en un párrafo previo… “Es imposible identificar un solo número real”.

Y veamos si soy capaz de demostrar mi aseveración.

Los números reales se asocian con los puntos de la recta. O, en otras palabras, cada uno de los infinitos puntos de una recta puede asociarse a un número real.

Recordando cosas que ya dije, entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números reales. Del mismo modo que entre dos puntos cualesquiera de una recta, existen infinitos puntos intermedios.

Sencillamente porque cada número real está especificado con infinitas cifras.

Por otro lado, suele afirmarse que los números naturales son un subconjunto de los números reales. O, lo que es lo mismo, los números reales incluyen a los números naturales.

Por ejemplo: El número 1 pertenece a los números naturales y también a los reales.

… como cualquier otro número natural.

… ¿O no?

¿Es lo mismo 1 que 1,000000000?

Cuando afirmamos que una persona pesa 70 Kg ¿Estamos afirmando que pesa 70,000000000 Kg?

¡Seguramente no!

Las balanzas comerciales no pesan con semejante cantidad de dígitos (o cifras significativas, si queremos ser más precisos). Peor aún, si concibiéramos una balanza con semejante precisión, descubriríamos que una persona real varía su peso (por el simple hecho de respirar y transpirar) con más rapidez que lo que somos capaces de leer en dicha balanza.

Pero esto es Física.

En matemáticas podemos decir que el “1” está seguido de infinitos ceros y con eso definimos el número real “1,000…”.

Bueno, … sí y no.

En realidad sólo parece que es posible definir perfectamente un número real.

La imposibilidad se nota más fácilmente cuando queremos diferenciarlo del “siguiente” número real. Y para entenderlo en un ejemplo aplicado al caso en cuestión, imaginemos que queremos definir el número real que sigue al ya mencionado “1,000…”.

Es imposible ¿verdad?

La aparente solución matemática a este problema se “logra” diciendo que es imposible ordenar los números reales. En pocas palabras, no podemos decir, primero va este número, después este otro, después tal otro, etc.

Pero esa no es una solución en toda regla. En realidad esa solución está “escondiendo bajo la alfombra” una propiedad “incómoda” de la recta de números reales.

¿Por qué podemos afirmar que hemos identificado al número “1,000…” pero no podemos identificar el que está a su lado?

… Tal vez sea porque no existe el número de al lado, pero tal vez ocurra que, en realidad, no podemos identificar ni tan siquiera el propio “1,000…”.

Para ello volvamos a la analogía o correspondencia entre le recta y los números reales.

Pero, para simplificar el ejemplo empleemos una recta “cerrada” sobre sí misma: Una circunferencia

O mejor aún, dos circunferencias.

Para demostrar que dos circunferencias de diferente diámetro tienen el mismo número de puntos puede, y suele, hacerse un planteo como el siguiente:

Imaginemos que tenemos dos circunferencias, de radio “1” y radio “2”, concéntricas.

1. Elijamos un punto cualquiera de la circunferencia exterior y tracemos un segmento de recta uniendo dicho punto con el centro de ambas circunferencias.
2. Ese segmento de recta corta, obligatoriamente, a la circunferencia interior en un punto cualquiera.
3. Mediante ese “sencillo” procedimiento hemos puesto en correspondencia (hemos unido con un segmento) dos puntos. Un punto perteneciente a cada circunferencia.
4. Podemos hacer ese mismo procedimiento para todos los puntos de la circunferencia exterior. Y cada segmento es diferente a todos los otros pues cada par de puntos define una sola recta.

De este modo no hay un solo punto de una circunferencia que no pueda ponerse en correspondencia con un punto de la otra.

De este modo, por la vía indicada, habríamos “demostrado” que ambas circunferencias tienen el mismo número de puntos.

…

Pero, … ¿Estamos seguros?

En primer lugar, nuevamente hemos indicado un procedimiento que requeriría infinitos pasos para completarse y por lo tanto no podríamos afirmar que hemos demostrado la correspondencia para ***todos*** los puntos.

Pero vamos a olvidarnos, por ahora, de este aspecto que ya he mencionado repetidamente en otros párrafos.

Analicemos cómo trazamos la primera recta.

En pocas palabras, tratemos de individualizar el punto de la circunferencia exterior elegido para ubicar el segmento de recta que lo une con el centro de la circunferencia.

Quizás una imagen visual resulte de ayuda.

Imagina, estimado lector, que estás tratando de visualizar un punto determinado, perteneciente a la circunferencia exterior, mediante una imagen de un microscopio “mágico” cuyo campo visual se amplía por “10” en etapas sucesivas. De ese modo, en cada etapa, logras ver más detalle del trozo de circunferencia que estás visualizando.

Cada vez que magnificas la imagen, el punto que buscas permanece en el centro de tu campo visual.

Después de muchas etapas, el arco de circunferencia ya parece un segmento recto.

Siempre observas “puntos” (formando un continuo hasta el límite de resolución de la imagen) a un lado y otro de tu “punto” central. Pero nunca logras distinguir un espacio entre el punto que estás seleccionando y los puntos de al lado. De hecho, no logras ver “puntos”. Siempre se presenta un segmento continuo desde un extremo al otro de tu campo visual.

***Nota**: En rigor de verdad, ni siquiera verías el arco de circunferencia ubicado en al campo visual del microscopio, puesto que se trata de un trazo sin espesor. Pero, ... podemos admitir esa licencia pues hemos dicho que se trata de un microscopio “mágico”.*

En realidad este es un proceso de nunca acabar. Nunca podrás magnificar la imagen lo suficiente para que, en tu campo visual, aparezcan puntos separados.

Pero eso significa no sólo que no puedes visualizar los puntos cercanos al que tratas de enfocar, sino que, además, ¡no puedes identificar el propio punto que es tu objetivo! Siempre está rodeado de puntos, más y más cercanos, que forman un continuo.

En otras palabras, no puedes identificar el punto por el que quieres trazar la recta.

Pero, seamos optimistas. ☺

… Digamos que decides trazar la recta… por donde sea.

Si trazas una recta, bueno… por algún punto tiene que pasar.

… es obligatorio.

¿O no?

Si apuntamos con algo sin espesor a un objetivo sin dimensión, parece difícil asegurar que hemos acertado ¿verdad?

Pero, como ya dije, seamos permisivos. Momentáneamente digamos que ya tienes tu primera recta.

Ahora, ¿Cuál es la que sigue?

… ¿¡…!?

Si no puedes identificar el punto de al lado ¿Cómo haces para trazar todas las rectas necesarias para la demostración?

El problema es doble.

No sólo tienes por delante una tarea interminable (trazar infinitas rectas) sino que no puedes ni tan siquiera empezar la tarea. ☹

O, si lo prefieres, no puedes continuarla después de ubicar la primera recta.

Yo creo que es imposible trazar la primera recta, del mismo modo que es imposible escribir un número de infinitas cifras. Pero me considero satisfecho si tú, amable y paciente lector, comienzas a dudar sobre la validez del procedimiento de trazar infinitas rectas por puntos que no puedes individualizar.

Quizás sea el momento de hacer algunas nuevas preguntas.

… Del tipo de preguntas incómodas, claro. ☺

Pregunta: ¿Cómo es posible que exista algo "continuo" donde no haya una posición que sea la siguiente a la que estamos considerando?

Respuesta (que no es exactamente una respuesta): Porque el continuo es tan esquivo como el infinito.

Pregunta: ¿Cómo es posible que estos planteos no se hayan realizado con anterioridad?, o, mejor expresado ¿Estos planteos tienen sentido o se trata de alguna clase de sofisma?

Respuesta: Para mí son planteos plenos de sentido, pero entiendo perfectamente a quienes opinan lo contrario. Después de todo estoy replanteando una polémica que se originó hace más de 2.000 años en la antigua Grecia.

¡Y estoy defendiendo al bando perdedor! ☺

En su momento perdió la escuela atomista.

Euclides y su continuo le ganaron a Demócrito y su mundo atómico.

Y la victoria fue casi completa (o mejor dicho, mucho mejor argumentada) al sentarse las bases del cálculo diferencial con sus funciones continuas con derivada.

… Hasta que aparecieron los fractales. ☺

Que presentan funciones continuas sin derivadas. Y que se construyen mediante pasos sucesivos y no a través de una función explícita.

Pero ese tema lo dejo para otra oportunidad. Por ahora voy a emplear argumentos más genéricos.

Revisando la Definición de Infinito

Entonces, … ¿Cómo habría que definir el infinito?

Voy a intentarlo, usando sus propiedades más destacadas

- El infinito es invariante e inabordable.

Y ahí debería terminar todo estudio del infinito.

… Gracias a su propia definición. ☺

El infinito no tiene puntas por donde comenzar a recorrerlo. Grandes pensadores han caído en la trampa de analizar algunas propiedades del infinito, cayendo en otras. El escritor Jorge Luis Borges atacó el problema del infinito con mucha más “imaginación” y destreza que algunos matemáticos.

El Libro de Arena

El relato de Borges que considero más logrado, con respecto a un análisis del infinito es “*El libro de arena*”.

En este relato Borges presenta un “libro” de infinitas páginas, de tal modo que cada vez que se lo abre, se abre en una página distinta. Además, es imposible recorrer sus infinitas páginas para encontrar la página que se busca.

Excelente uso de una de las propiedades del infinito.

… Pero cayendo en una de sus trampas. ☺

Un libro de infinitas páginas (dejando de lado el análisis de si ocupa, o no infinito espacio) **¡no se puede abrir!**

El infinito es inabordable.

¿Por qué afirmo esto?

Fácil… Por la misma razón que ningún número real se puede especificar.

Este ejemplo sirve para ver, desde otro ángulo, que el número natural “1” no es lo mismo que el número real “1,000…”.

Si fueran la misma cosa podríamos abrir el libro de arena por la página “1”.

… Bueno, la página “1,000…”.

Y eso es una tarea imposible.

Veamos como lo explica el propio Borges.

“...Me dijo que su libro se llamaba el Libro de Arena, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin. Me pidió que buscara la primera hoja.

Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.

–Ahora busque el final.

También fracasé; apenas logré balbucear con una voz que no era la mía:

–Esto no puede ser.

...”.

Ahora bien, si la “primera página” no existe y por la misma razón no existe la segunda página, ni ninguna que siga a éstas en orden correlativo, ¿Cómo puede afirmarse que existe alguna página?

Volviendo a los números reales ¿Cómo puedo saber que lo que estoy definiendo es el número 1,000… si no puedo colocarlo entre otros dos números?

De hecho no existen (no es que no puedan identificarse sino que **¡no existen!**) el número anterior ni el posterior.

Para convencerse de esto último, tratemos de imaginar, como ya lo he indicado en otras partes de este capítulo, cuál es el número siguiente a “1,0000…”.

La diferencia entre ambos números debe estar “en el infinito”. Pero agregando cifras no se llega a la “ultima” cifra en la que debe estar la diferencia. Por lo tanto, si no existe el número siguiente a “1,000…” ¿cómo podemos asegurar que existe el propio 1,000…?

… Sólo por definición (o su equivalente: “Acto de Fe”).

Entonces, si ningún número real puede identificarse (por la misma razón que no se pueden enumerar todos los números naturales) resulta entendible por qué afirmo que ninguna página del libro de arena puede ser mostrada. Cada página debe estar entre dos páginas. Pero, … ¡no existen la página previa ni la posterior!

Hay otra forma de llegar a la imposibilidad de tan siquiera abrir el libro de infinitas páginas. Obligatoriamente, las páginas no pueden responder a una numeración equivalente a la de los números naturales.

Por dos razones:

- Excepto el primero de ellos, todos los números naturales sí tienen un número previo y uno posterior.
- Derivado de lo anterior, si abriéramos el libro por una página cualquiera, con la paciencia necesaria podríamos llegar a cualquier otra página.

En consecuencia las páginas deben responder a una numeración como la de los números reales. Y, en este caso, cada vez que se intenta abrir el libro entre dos páginas (no me imagino cómo se puede abrir un libro sin separar una página de la anterior) aparecerían infinitas páginas intermedias, impidiendo la apertura. Lo mismo que explica Borges para la primera página se aplica a cualquier otra página.

A la inversa, si se lograra abrir el libro entre dos páginas, eso implicaría que existen dos páginas contiguas (una al lado de la otra). Y eso contradice lo que ocurre con los números reales, dado que es imposible (de imposibilidad absoluta) indicar dos números reales que estén uno al lado del otro. Siempre hay infinitos números reales entre cualesquiera dos de ellos.

Borges, en realidad, era conciente del problema y trató de eludirlo con frases como

"...Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. La volví; el dorso estaba numerado con ocho cifras...".

"...El ángulo llevaba una cifra, ya no sé cual, elevada a la novena potencia...".

Se trata sólo de tibios intentos porque ninguno de esos números mencionados es un número real, de infinitas cifras.

En realidad Borges transmite correctamente la imposibilidad de ordenar correlativamente los números reales, pero recurre a una licencia literaria: Usa números desordenados.

Es cierto que los números reales no pueden enumerarse correlativamente pero no por eso se puede afirmar que el 999 está, por ejemplo, entre 100 y 200. ☺

Entonces Borges, con un maravilloso cuento, cae en la misma falacia que generan los infinitos cada vez que se quieren aplicar a la física. Borges define como realizada una tarea que es imposible de realizar. En un cuento se pueden tomar esas libertades. En las ciencias naturales, … me temo que no.

Entonces… ¿Hay más de un infinito, o no?

Este tema ya lo he tratado superficialmente, de modo que es conveniente que formalice mis ideas de forma un tanto más rigurosa.

En el camino voy a repetir (en forma más o menos compacta, o ampliada según el caso) argumentos que ya he analizado. Espero que el lector me sepa disculpar la insistencia sobre ciertos temas, pues creo que son fundamentales para entender el mensaje que intento transmitir.

Este apartado es una especie de resumen explicativo de lo visto hasta este punto.

Muchos autores coinciden en que Georg Cantor fue quién "domesticó" al infinito, allá por las postrimerías del siglo XIX. Él fue quien introdujo el concepto de números transfinitos, asociado a lo que hemos denominado infinitos de diferente orden o de diferente grado de infinitud.

Desde esa época, y hasta el presente, las matemáticas del infinito se han ido consolidando y ampliando, a tal punto que la enseñanza de los conceptos de Cantor se realiza rutinariamente en los cursos de matemáticas.

Esto es tan así que cualquiera que pretenda contradecir los desarrollos de Cantor y sus sucesores se encontraría en graves problemas para captar la atención de los especialistas.

Pero, este no es un libro para especialistas.

… De hecho, dista mucho de ser un libro de matemáticas. ☺

Entonces, me puedo tomar algunas licencias y saltearme la rigurosidad matemática y sus concisas definiciones, para tratar al infinito en un lenguaje coloquial. Porque lo que quiero hacer, es amigar al infinito con la lógica, con el sentido común y, por sobre todas las cosas, con las aplicaciones destinadas a tratar de entender el mundo que nos rodea.

Si pretendiera ser riguroso debería escribir y documentar cosas como la siguiente: "*Un conjunto infinito es aquél que puede ponerse en biyección con un subconjunto propio de sí mismo*".

Además debería emplear la nomenclatura matemática para simplificar y hacer más rigurosas las definiciones.

En lugar de lo anterior voy a decir que una de las propiedades aceptadas de los conjuntos infinitos es la de que hay subconjuntos del mismo que poseen tantos elementos como el propio conjunto.

El "Infinito" Inagotable

El ejemplo que ya hemos tratado es el que "demuestra" que hay tantos números pares, como números enteros, pese a que los pares son sólo un subconjunto de los números enteros.

Veamos esto con algún detalle adicional.

Entre el 1 y el 10 hay 10 números naturales: Los 10 primeros dígitos, normalmente ordenados en orden creciente: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 y 10.

En esta colección sólo 5 son números pares (2,4,6,8 y 10).

Si tomamos los 100 primeros números naturales (los números que cubren el rango de 1 a 100), es fácil comprobar que sólo 50 de ellos son números pares.

En ambos casos los números pares son sólo la mitad de la cantidad de enteros considerados.

Y lo mismo ocurre con los números comprendidos entre 1 y 1,000,000 o entre 1 y cualquier número par que consideremos.

… por muy grande que sea dicho número.

En grupos finitos, siempre los números pares son la mitad del total de números naturales o enteros considerados.

… Excepto si consideramos "*todos*" los números enteros. En ese caso se acepta que la cantidad de números pares es la misma que la cantidad de números enteros.

La demostración, como ya se mencionó antes en este mismo capítulo, se basa en alguna variante del ejercicio de poner en correspondencia cada elemento de un conjunto con un elemento del otro conjunto.

En el caso de los pares positivos, al "2" le asignamos el número "1" (porque el "2" es el "primer" número par que encontramos en la serie). Al "4" le asignamos el número "2"; al "6" el número "3" y así siguiendo.

A cada par positivo se le asigna un número natural que indica también su número de orden de aparición al recorrer los números desde el primero en adelante.

En pocas palabras… es posible "contar" o "numerar" los números pares.

Entonces, como es posible contar "todos" los números pares, y dichos números no se agotan nunca, se concluye que hay "tantos" números pares como números naturales.

Veámoslo de otra forma: Es imposible imaginar un número natural que no tenga asociado un número par (que se obtiene por el "simple" procedimiento de duplicar dicho número natural)

Por lo tanto, si cada número natural tiene asociado un número par, la conclusión es directa: Hay tantos de unos como de los otros.

Quizás siga pareciendo extraño, pero esta "demostración" es la que se acepta desde los tiempos de Cantor con respecto a la *cardinalidad* (igual cantidad de elementos) entre todos los conjuntos inagotables que sean "numerables".

En alguna medida es desconcertante que cuando tomamos fracciones del total (subconjuntos finitos). de los números enteros, sólo la mitad de los elementos son pares. Pero, cuando tomamos todo el conjunto, podemos *demostrar* que hay tantos números pares como enteros.

Ésta es una de las más simples paradojas de los conjuntos infinitos.

O, debería decir… ¡La madre de las paradojas! ☺

Todas las demás derivan de ésta.

Entonces cabe preguntarse ¿No estaremos haciendo algo mal en el razonamiento previo?

Bueno, … sí y no.

Matemáticamente se puede definir una situación paradójica y operar con ella. En realidad en matemáticas no habría que usar el término "paradoja". En esta rama del conocimiento las cosas son correctas o incorrectas, o, en términos más rigurosos, las proposiciones son *verdaderas* o *falsas*.

Con una aclaración: verdad o falsedad matemática no hace referencia a verdad o falsedad filosófica. En matemáticas una proposición es verdadera si no contradice los axiomas que hemos definido. Nada nos asegura que un axioma sea "verdadero" en un sentido filosófico. Un axioma sólo "**es**" y las proposiciones u operaciones que hacemos respetan, o contradicen, dichos axiomas.

La situación paradójica sólo puede surgir cuando pretendemos transportar los resultados matemáticos al mundo físico.

Como ejemplo de lo que estoy diciendo, alcanza con hacer una comparación sencilla entre resultados matemáticos y resultados físicos. En las ciencias físicas, se acepta que una teoría se derrumba frente a una diferencia cualitativa entre el resultado experimental y la predicción teórica.

Pero en el caso que estamos analizando (infinitos matemáticos) las cosas no son así. Veámoslo con un ejemplo sencillo. Las siguientes proposiciones se aceptan como verdaderas:

1. Hay tantos números pares positivos como números naturales.
2. Todo número par positivo es un número natural
3. El número “3” es un número natural
4. El número “3” es positivo pero no es un número par.

La proposición 2 indica que no puede haber más números pares que naturales, pero nada dice de la situación inversa.

Pero, si las dos últimas proposiciones son verdaderas, no puede serlo la primera, dado que hemos encontrado al menos un número natural que no es un número par.

Es más o menos sencillo entender que una disciplina que acepta como verdaderos hechos que se contradicen mutuamente, debe conducir a paradojas. Y eso es lo que ocurre con el uso convencional (quiero decir: *Aceptado actualmente*) de los infinitos cuando se los traslada de su definición matemática a sus posibles aplicaciones en la física.

Por esa razón estoy haciendo un esfuerzo para trabajar con los infinitos de una forma que sea compatible con las ciencias físicas, cuyas teorías no admiten (bueno… no debieran admitir) enunciados verdaderos y contradictorios entre sí.

Resumiendo lo que hemos analizado hasta este punto, podemos decir que el infinito de los números naturales es un tipo de “infinito” inagotable. Es el tipo de infinitos cuya principal propiedad es que no se termina si lo sometemos a algún tipo de operación continua.

De la misma forma calificaríamos de inagotable una batería de la que podemos extraer corriente en forma permanente. Se trataría de una fuente “infinita” de energía.

Pero, … observemos un detalle interesante.

Imaginemos que disponemos de una batería inagotable de 12 voltios capaz de entregar, digamos, 100 mA, de aquí a la eternidad.

Ahora imaginemos que disponemos de otra batería inagotable de 12 voltios capaz de entregar una corriente eterna de 1.000 A. Esta batería puede entregar una potencia 10.000 veces superior a la primera.

La primera nos permitiría escuchar radio eternamente. La segunda nos permitiría mover un vehículo con aire acondicionado, radio y unidad de CD, también eternamente.

Desde el punto de vista de la inagotabilidad, ambas baterías pertenecen a la misma categoría (en matemáticas de los infinitos se diría que tienen la misma cardinalidad)

Pero ahí se acaban las similitudes.

La segunda batería se podría dividir en 10,000 sub-unidades (subconjuntos), cada uno idéntico, en prestaciones, a la primera batería mencionada.

Pero ¿Se puede afirmar que cada subconjunto es capaz de entregar tanta energía como la batería de 1.000 A?

En matemáticas se responde positivamente al decir "*Un conjunto infinito es aquél que puede ponerse en biyección con un subconjunto propio de sí mismo*".

Bien, en el terreno de la física (y de eso tratan estos apuntes) dos infinitos inagotables no son necesariamente idénticos.

Al menos yo prefiero la segunda de las baterías mencionadas. ☺

Veamos entonces el segundo tipo de infinito.

El Infinito por Definición

Este infinito no se construye. Simplemente se define. Se dice algo así como "en este conjunto **hay** infinitos elementos".

La acumulación de números naturales se describe iniciando la cadencia "1,2,3…".

Los infinitos por definición no admiten este tipo de descripción.

Por ejemplo, de acuerdo con la geometría de Euclides, en una recta hay infinitos puntos. Pero una recta no se construye colocando un punto a continuación de otro. Sencillamente porque es imposible acumular longitud, sumando cosas que no tienen longitud.

Entonces, … ¿Cuál es la diferencia fundamental entre ambos tipos de infinitos?

La diferencia fundamental radica en que los infinitos por definición ¡No pueden recorrerse!

Me explico con algo más de detalle.

Para ir del 1 al 100, en el conjunto de números naturales, sólo es necesario contar "de a uno". Luego de dar los pasos necesarios llegaremos desde primero hasta el segundo de los números elegidos para el recorrido.

Pero esta situación cambia cuando enfrentamos los números reales. Cuando hacemos referencia al número "1", en realidad estamos hablando del número "1,000…" o sea: Un "1" seguido de infinita cantidad de ceros.

¿Qué ocurre, entonces, cuando queremos ir desde el número "1.000…" al número "2.000…" recorriendo los números reales.

… ¡Simplemente no podemos hacerlo!

Como ya hemos analizado con diferentes enfoques, entre los números reales es imposible decir cuál es número siguiente al número "1,000…".

La diferencia entre el "1,000…" y el número siguiente debería estar en la última cifra.

… Pero no existe la última cifra, puesto que los decimales son infinitos (del tipo inagotable)

Evidentemente estamos enfrentando un nuevo tipo de "infinito". Estamos hablando de infinitos números donde cada uno es, en sí mismo, un infinito inagotable.

De hecho, como ya he explicado, el conjunto de números reales es sólo una formidable abstracción, pues no se puede mencionar (identificar) ninguno de sus elementos.

Aplicando las mismas reglas que estoy usando, cuando dije –un "1" seguido de infinitos ceros– evidentemente cometí una falacia puesto que poner infinitos ceros después del “1” es una tarea imposible. Mejor dicho, … interminable. ☺

Infinitos Dinámicos e Infinitos Estáticos

Otra forma de diferenciar los infinitos inagotables de los infinitos por definición es a través de sus propiedades. En ese caso, ambos conjuntos se identificarían de la siguiente forma

- Infinitos dinámicos
- Infinitos estáticos

Los primeros son inagotables.

Sólo se pueden empezar los procesos.

No se pueden terminar.

Pero, y esto es fundamental, se puede ir (recorrer la distancia que los separa) de un elemento a otro cualquiera.

… Desde **cualquier** elemento a **cualquier** otro.

Los segundos infinitos son invariantes e inabordables. Sólo operan por definición. No se puede ir de un elemento al siguiente.

… Como en las páginas del libro de arena. ☺

De este modo los infinitos de orden superior son todos estáticos o infinitos por definición.

Hablar de la numerabilidad de estos infinitos (poner en correspondencia cada uno de sus elementos con la secuencia de números naturales) es una falacia conceptual porque estos infinitos son inabordables. No es posible especificar el primer elemento para empezar la numeración.

Pero, otra vez quiero poner los pies sobre la tierra.

No tengo nada contra el uso matemático (exclusivamente matemático) de infinitos de cualquier orden.

Sólo sostengo dos cosas.

1. La única variedad de infinito que interesa a la física es la de los “infinitos” inagotables.

2. Dos infinitos inagotables que evolucionan a diferente ritmo, ¡son diferentes! Dado que estos infinitos no se agotan, es una falacia afirmar que sus propiedades se igualan en el infinito.

El segundo enunciado puede ilustrarse diciendo que, desde el punto de vista físico, los números pares son sólo la mitad de los números enteros.

… Vaya, … lo dije. ☺

Una observación respecto a los infinitos inagotables.

A partir de los ejemplos que he presentado (en particular el de los números naturales) se puede apreciar que los infinitos inagotables tienen un comienzo.

Nota*: Ésta es una observación crucial con respecto al posible empleo de los infinitos en la física.*

Ya mencioné que los números naturales sólo pueden recorrerse empezando por el extremo operativo. Empezando por el extremo “infinito” (infinito por definición), no se puede recorrer los números naturales.

Puede pensarse, entonces, que mi afirmación no es correcta pues los números enteros (que extienden el rango de los números naturales al campo de los números negativos) es una clase de infinito inagotable que posee dos extremos no operables (“más infinito” y “menos infinito”).

En una primera impresión, a diferencia de los números naturales, los enteros no empiezan en ninguna parte pues recorren una “recta” infinita (sin extremos)

En realidad esto es un abuso (o una sobre-simplificación) de la definición de números enteros.

En realidad, los enteros empiezan, al igual que los naturales, desde el “cero”. Sólo que avanzan en los dos sentidos (positivo y negativo)

Para comprobar esta última afirmación, sólo hay que verificar que es imposible indicar los primeros términos de la enumeración, empezando desde cualquiera de los extremos “infinitos”.

Los números enteros pueden “recorrerse” siempre y cuando comencemos a hacerlo desde algún número en particular. Recién a partir de ese momento es posible comenzar el recorrido y (lo que es muy importante) alcanzar, con la paciencia adecuada, cualquier otro número entero que elijamos.

Invirtiendo este argumento, si es posible recorrer alguna entidad, aunque parezca inagotable… **¡debe haber tenido un punto de inicio!**

Nada puede empezar desde el infinito y alcanzar una zona donde se pueda hacer un recorrido.

Consecuencias

Todas las consideraciones que he presentado carecerían de utilidad si no pudieran obtenerse conclusiones útiles a partir de ellas.

Pero, en realidad, en el párrafo previo estoy empezando de atrás hacia delante. Como expliqué al comienzo de este capítulo, mi análisis del infinito no nace sólo como resultado de una simple curiosidad. En realidad mi concepción del mundo físico y la necesidad personal de buscar respuestas a ciertos interrogantes primarios me llevó a "chocar" contra el infinito, en la forma que lo presentan los libros especializados.

De modo que las "consecuencias" que voy a presentar a continuación tal vez debiera presentarlas como causas de los análisis que presenté a lo largo de estos desarrollos.

Sólo un llamado de atención. Muchos de los análisis que siguen son sólo especulativos, de modo que no deben tomarse más que como una guía de pensamiento. Cuando uno empieza a analizar el mundo conocido desde una nueva perspectiva (o paradigma, de acuerdo con los desarrollos de Kuhn) es muy fácil perder el rumbo.

Espero, por lo tanto, contar con la benevolencia de los lectores al analizar los desarrollos que siguen.

Las propiedades básicas del Universo

Por diferentes razones mi concepción del mundo físico (al que, cuando mencionamos como un todo, le aplicamos el nombre de "Universo") requiere que esté construido sobre "ladrillos" discretos (de tamaño finito).

Probablemente, una de las razones primarias para esta “necesidad” personal es que mi formación profesional en Química me “obliga” a ver la materia como algo formado por entes primarios de tamaño finito. Y, junto con la materia, todas las propiedades asignadas a ésta.

No me imagino como concebir la formación de “algo” a partir de cosas de tamaño nulo.

En esto, como ha quedado patente en los escritos de este capítulo, soy un ferviente defensor de las ideas de Demócrito.

Poco importa que se haya demostrado que los átomos de la teoría de Dalton son divisibles (tienen estructura interna). Eso no cambia la idea fundamental de que un trozo de hierro (o de cualquier otro material) sólo puede dividirse hasta cierto punto sin que pierda las características del hierro.

Esto se aplica a todas las propiedades del universo que conozco.

De hecho, la teoría cuántica, sugiere que la estructura de la materia (o de la energía o de cualquier manifestación medible) posee un límite inferior.

Consecuencia inevitable: *Si queremos que las matemáticas sirvan para describir el mundo físico, es necesario que también ellas posean unidades mínimas de trabajo. De otro modo, en algún momento, las matemáticas se apartarán, inevitablemente, de la correcta descripción del mundo físico.*

La reversibilidad

Una de las “luchas” filosóficas más notables de las últimas dos centurias se relaciona a la imposibilidad de compatibilizar dos de las visiones del Universo que han resultado más fructíferas en cuanto a resultados e interpretación del mundo físico.

- La reversibilidad newtoniana.
- La irreversibilidad termodinámica.

Esta incompatibilidad se hizo más manifiesta desde el momento en que se desarrolló la teoría cinética de la materia que permitió unir ambas disciplinas.

La física newtoniana está indisolublemente ligada a las matemáticas del continuo. De hecho el cálculo diferencial nace de la mano de las necesidades de la revolución científica de Galileo, Newton y sus sucesores.

Pero la termodinámica estadística (de la cuál la teoría cinética de los gases aporta el ejemplo más conocido) se basa en interacciones discretas.

***Nota**: Esta sola diferencia inclinaría la balanza a favor de la termodinámica*

Sin embargo, el tema es más profundo (o sutil) pues la termodinámica molecular emplea la física newtoniana para describir las colisiones entre moléculas.

Como veremos, es posible que la clave de la irreversibilidad se resuelva recién cuando se empleen matemáticas discretas (no basadas en el concepto de punto sin dimensiones) para describir el mundo físico.

Es fácil demostrar que con pasos discretos hay caminos que no pueden recorrerse en ambas direcciones.

Veamos un ejemplo sencillo.

Si empleamos números discretos (que no incluyan infinitos decimales) las reglas de redondeo (obligatoria en estos casos) producen fenómenos irreversibles.

Imaginemos que trabajamos con una calculadora que emplea sólo dos cifras decimales.

Si dejamos caer un objeto desde una altura de 10,00 m su velocidad final (asumiendo una aceleración gravitatoria de 9,81 m/s^2) será de 14,01 m/s.

La cuenta se hace con ayuda de las conocidas ecuaciones:

- Distancia = 0.5 x aceleración x tiempo^2
- Velocidad final = Aceleración x tiempo

Pero si dejamos caer el objeto desde una altura de 10,01 m (desde un cm más alto que en el caso anterior) la velocidad final también es de 14,01 m/s.

Pregunta: ¿Cómo podemos tener la misma velocidad final partiendo desde diferentes alturas?

Respuesta: En realidad las velocidades finales serían de 14,007141… m/s y 14,014143… m/s, respectivamente. Pero las condiciones de redondeo a dos decimales igualan ambos resultados.

Si ahora asumiéramos que el objeto rebota en forma completamente elástica podemos calcular (con ayuda de las mismas ecuaciones, y con las mismas reglas de redondeo) cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto.

Y el resultado es 10.00 m

De este modo es fácil apreciar que, si no se trabaja con infinitos decimales, las ecuaciones de la física newtoniana no resultan reversibles.

Con la cantidad de decimales especificada, si un objeto se arroja desde 10.01 m, rebota (mediante choques completamente elásticos) sólo hasta 10.00 m

¿Sorprendente?

Más sorprendente aún resulta la no conservación de la energía. En este ejemplo no se recupera la energía potencial inicial.

***Nota**: Cabe aclarar que, dependiendo de las condiciones iniciales, la cuenta puede redondear a mayores o a menores valores del inicial, de modo que lo que estamos considerando no implica una perdida continua del cálculo de la energía. Luego de muchos ejemplos es de esperar que las reglas de redondeo generen un promedio equilibrado.*

Es importante notar que este fenómeno se produce con cualquier número de cifras significativas con que se trabaje.

Excepto que se “trabaje” con infinitas cifras, claro. ☺

Con infinitas cifras (funciones continuas) trabaja la física newtoniana. Y por eso puede hablarse de reversibilidad de sus ecuaciones.

En este punto cobra relevancia una de las preguntas fundamentales que me he formulado cuando empecé a plantearme los temas analizados en estos desarrollos.

¿Con cuantas cifras significativas trabaja la naturaleza?

Si la respuesta no es "infinitas", se concluye, inmediatamente que los fenómenos naturales son irremediablemente irreversibles.

… Cosa que coincide (no extrañamente) con la realidad experimental. ☺

Otro punto importante es la mención que hago con respecto a reglas de redondeo.

Esta expresión puede sugerir que se trata de reglas humanas arbitrarias, pero no es esa la intencionalidad que le doy a la expresión.

Al plantear que la naturaleza posiblemente trabaje con un número máximo de cifras significativas, sólo estoy diciendo que en algún momento se trunca la posibilidad de interacción.

Pero, por razones físicas y no por razones matemáticas.

Desconozco cómo haría la naturaleza para definir "reglas de redondeo" pero si hay dos situaciones diferentes que conducen a la misma respuesta, en algún lado se "truncó" el cálculo o, mejor dicho, la interacción.

Veámoslo nuevamente con un ejemplo.

Sabemos (medición experimental) que la interacción gravitatoria responde a la regla de la inversa del cuadrado de la distancia.

Cuanto más lejos se encuentra un objeto de otro, menor es la interacción gravitatoria entre ellos. Al doble de distancia, la fuerza de interacción se reduce a la cuarta parte.

De este modo podemos calcular la "atracción gravitatoria" entre dos átomos de hidrógeno que están separados por, supongamos, 10 cm de distancia.

Es un número muy pequeño, … pero calculable.

Pregunta: ¿Podemos medir esa atracción?

Respuesta: No. Actualmente (y supongo que para siempre) es imposible hacer una determinación experimental de esa magnitud.

Cuando calculamos esa interacción gravitatoria asumimos, implícitamente, que todavía estamos dentro del rango de aplicación de la ley de la inversa del cuadrado.

Pero, … ¿Podríamos asegurar que esa interacción continua cuando los átomos están separados por, digamos, 1 año luz de distancia?

… ¿O un millón de años luz?

¿No hay límite?

Para las matemáticas, no, pero ¿Para la naturaleza?

Bien, el empleo de las matemáticas del continuo asume que las cuentas son válidas… hasta el infinito.

Yo creo que debe haber un límite.

Y ese límite genera, inevitablemente, irreversibilidad.

En otras palabras, con infinitas cifras no puede lidiar ni siquiera el Universo. ☺

Las dimensiones del Universo

Analicemos el siguiente texto extraído del libro de Guillermo Boido – "***Noticias del Planeta Tierra*** *– Galileo Galilei y la revolución científica*".

"...

En 1635 Cavalieri publicó su libro "Geometría Indivisibilibus"...

Una superficie podía ser concebida como compuesta por infinitas líneas paralelas ("todas las líneas") ... Cada elemento constitutivo de una superficie (línea) ... era llamado "indivisible" y la superficie... resultante un "agregado de indivisibles". Cavalieri era conciente de que un "agregado" no es una suma pues, como señala explícitamente, es imposible sumar infinitas líneas de espesor nulo para obtener una superficie...

...".

El concepto de infinito, tal como se lo maneja habitualmente sugiere que una línea puede formarse con infinitos puntos sin dimensión, que infinitas líneas sin espesor pueden formar un plano, que infinitos planos pueden dar lugar a objetos tridimensionales y así siguiendo.

En realidad, como ya he demostrado en los diferentes desarrollos de este capítulo, esas afirmaciones establecen infinitos "por definición". Y como tales no tendrían cabida en la física

Pero el tema es mucho más profundo.

No es sólo que agrupando cosas de "cero" dimensión (el punto euclidiano) no se puede formar algo unidimensional.

Como ya vimos, en una recta de infinitos puntos (por definición) resulta imposible identificar un punto adimensional. Del mismo modo que no puede abrirse el libro de arena en su primera página (ni en ninguna, claro)

Eso implica que no sólo debemos aceptar lo aparentemente obvio que si algo tiene sólo dos dimensiones, no puede tener tres. También debemos aceptar que si algo tiene tres dimensiones… ¡No puede tener incluidos objetos de dos dimensiones!

Dicho en otras palabras, si somos capaces de identificar un objeto de tres dimensiones, éste no puede formar parte de un objeto de cuatro dimensiones pues, sumando objetos de 3 dimensiones no se genera una cuarta dimensión, del mismo modo que alineando puntos no se genera una recta.

Analicemos esto último con más detalle.

Nuestro universo posee, por lo menos tres dimensiones. Pero yo estoy afirmando que, por esta razón, en él no tienen cabida objetos de 2 dimensiones.

Un plano sin espesor es sólo una idealización. Cualquier superficie que imaginemos tiene que tener espesor. De otra forma sería imposible interactuar físicamente con ella.

***Nota**: Para aquellos que han leído sobre las aventuras de los "terraplanenses" en su "universo" de dos dimensiones, debo recordarles que en su interacción con objetos tridimensionales se asume que los objetos tridimensionales están formados por "infinitos" planos bidimensionales.*

Una pompa de jabón es un objeto físico que parecería que podemos asimilar a una superficie de dos dimensiones, desplegada en un Universo de tres dimensiones. Sin embargo sabemos que esta imagen es sólo una aproximación.

La pompa tiene, por lo menos, el espesor de una molécula. Y esto dista mucho de ser un espesor nulo.

Para apreciar lo que significa un objeto de sólo dos dimensiones, sus dos caras, en realidad deben ser una sola, pues las "dos caras" es un concepto válido sólo en tres dimensiones.

***Nota**: Posiblemente resulte sorprendente la afirmación previa, pues da la sensación de que un plano matemático tiene dos caras. Para "comprobar" que no es así, alcanza con imaginar una línea "dibujada" en dicho plano y preguntar en qué cara está dibujada dicha línea. Dicho de otra forma, si hubiera dos caras... tendría que haber un espesor.*

En consecuencia si nos "topáramos" con una pompa auténticamente poseedora de sólo dos dimensiones, no habría forma de interactuar con ella.

Ni nosotros con ella, ni ella con nosotros.

Por esta razón, invirtiendo el razonamiento, dado que podemos interactuar con objetos de tres dimensiones, eso quiere decir que nosotros no tenemos más que tres dimensiones.

Al igual que nuestro Universo… que interactúa con nuestras tres dimensiones.

Es importante aclarar que en los párrafos previos estoy aceptando que los objetos con los que interactuamos cotidianamente poseen tres dimensiones. Y eso no es algo fácil de demostrar.

… Ni siquiera creo que sea posible hacerlo. ☹

De todos modos, la argumentación previa está destinada fundamentalmente a desestimar expresiones del tipo "Nuestro Universo es una especie de superficie esférica de tres dimensiones en un Universo de cuatro o más dimensiones".

Estas expresiones se emplean cuando se trata de mostrar, por analogía, la posibilidad de que nuestro Universo sea finito, pero sin límites. La superficie de una esfera cumple con este requisito. Dicha superficie tiene un tamaño finito, pero no tiene límites. Recorriendo la superficie de una esfera no es posible identificar una barrera que no se pueda franquear.

¡Pero la superficie es de dos dimensiones y la esfera de tres!

Muy Importante*: Si en vez de una superficie esférica se toma una "cáscara" esférica (una "superficie" con espesor), inmediatamente aparecen límites en el movimiento radial ("hacia adentro" o "hacia afuera" de la esfera)*

Expresado de otra forma, los argumentos previos indican que nuestro Universo no puede tener más dimensiones (ni tampoco menos) que los objetos que lo integran. Pero, además, nuestro Universo no puede pertenecer a otra entidad de más dimensiones que él mismo.

O, al menos esa es mi opinión en este momento. ☺

Las matemáticas del continuo

En alguna medida, ya traté este tema al analizar la irreversibilidad de los procesos físicos

En este apartado sólo quiero agregar que objetos tales como órbitas continuas no tendrían cabida en unas matemáticas discretizadas. Los pasos discretos y la limitación en el número de cifras significativas empleadas por la naturaleza, podrían generar desviaciones de las leyes del movimiento cuando están involucradas grandes escalas.

Veámoslo con algún detalle, analizando una de las piezas clave del cálculo diferencial e integral, el "dx" ("diferencial equis").

Lo que se ha hecho matemáticamente es un desarrollo maravilloso (el cálculo diferencial) que permite trabajar de forma que casi podemos independizarnos del problema "en el punto".

… Pero digo "casi" porque si llegamos al nivel del punto, nos topamos con el problema del infinito.

En resumen cualquier "dx" contiene infinitos puntos.

… Por muy pequeño que sea "dx".

Cuando se calcula el cociente "delta y /delta x" cuando "delta x" tiende a "cero" no se pretende hacer el cálculo cuando "delta x" toma el valor cero.

La diferencia es el salto desde “infinitos puntos” a “un punto”.

… un pequeño salto para un diferencial… pero un gran salto para la humanidad. ☺

El cálculo diferencial no trabaja con infinitos.

Trabaja con el límite de cosas que crecen o decrecen indefinidamente.

A modo de ejemplo, la derivada del espacio respecto al tiempo, en una trayectoria física, describe muy bien la velocidad puntual de un móvil.

… Hasta un cierto límite.

… El límite de “puntos” físicos.

… Cuando se pasa a los puntos adimensionales (en el sentido que le dio Euclides a los puntos geométricos) empieza la fantasía.

La Conservación de la Energía

El primer principio de la termodinámica está vinculado a lo que conocemos como ley de conservación de la energía.

En Wikipedia podemos leer

“La ley de la conservación de la energía constituye el primer principio de la termodinámica y afirma que la cantidad total de energía en cualquier sistema aislado (sin interacción con ningún otro sistema) permanece invariable con el tiempo, aunque dicha energía puede transformarse en otra forma de energía”.

Sin embargo, es imposible demostrar en forma absoluta este principio. De hecho se trata de un postulado, respaldado por innumerable cantidad de experiencias.

Pero el hecho de que lo identifiquemos como un postulado (o axioma fundamental) no le quita mérito pues se trata de un postulado que aceptamos como muy razonable.

Como consecuencia, los técnicos que han estudiado termodinámica no tratan, en la actualidad, de crear energía a partir de “nada”. Se "sabe" que cualquier esfuerzo gastado en este objetivo está condenado al fracaso.

… Por la sencilla razón de que no hemos encontrado excepciones a los principios termodinámicos.

¿O sí?

Bueno, … existen "excepciones" a los principios termodinámicos en sistemas formados por pocos componentes primarios. La termodinámica trata con sistemas extensos en los que son válidos los promedios y valores estadísticos en general.

La Teoría Cinética de los Gases no es adecuada para describir el comportamiento de, digamos, 10 moléculas de gas.

Pero estas son excepciones menores.

El Big Bang, la teoría cosmológica dominante, es una flagrante excepción a la regla de conservación de la energía.

Y vaya tamaño de excepción ¿verdad?

Conforme a esta teoría, todo el Universo se creó a partir de la nada.

Más aún, si se aceptara la segunda teoría cosmológica en importancia, la teoría del Estado Estacionario, la cosa es aún peor. Conforme a esta teoría continuamente se estarían creando fuentes de energía para sustituir a las que se van agotando como consecuencia del proceso que se conoce como "Muerte Térmica" del Universo y que técnicamente está vinculado al inevitable crecimiento de la propiedad termodinámica conocida como Entropía.

Entonces ¿Por qué aceptamos la validez de los principios de la Termodinámica, si las dos teorías cosmológicas más importantes, no los respetan?

La Respuesta es operativa. Como ya lo expresé, porque no hemos encontrado excepciones en la escala de trabajo de laboratorio.

Pero también por razones conceptuales más profundas.

Porque las matemáticas del continuo no permiten siquiera imaginar cómo crear energía de la nada. ☺

Sin embargo, ya vimos que si la Naturaleza “redondea” las interacciones físicas, la irreversibilidad es obligatoria. Y junto con la irreversibilidad, la no conservación de la energía en pasos individuales.

Cuando introduje este tema mencione que esas “violaciones” en pasos individuales se compensarían a lo largo de un número grande de interacciones, dando lugar a la conocida conservación de la energía.

Pero, … ¿Qué pasaría si fuéramos capaces de idear un sistema que siempre “redondeara” las cifras para el mismo lado?

Después de todo ya existen ejemplos, en otras ramas de las actividades humanas, que trabajan en ese sentido.

El sistema monetario no trabaja con infinitas cifras. Y, de vez en cuando, algún ingenioso operador logra “redondear” las cifras de los movimientos de dinero para quedarse, sistemáticamente, con los “sobrantes” del redondeo.

Ese tipo de actividad sería imposible si las transacciones se hicieran con “infinitas” cifras significativas.

Bueno, … es sólo una idea, claro. ☺

El Tiempo

Este tema merece un análisis propio.

Por ahora basta con mencionar que dado que el tiempo puede recorrerse, el concepto de tiempo (que ya pondré oportunamente en entredicho) debe asociarse al tipo de infinitos que llamé “inagotable”. En otras palabras, si el tiempo puede recorrerse es porque tuvo un inicio.

… Sea lo que sea lo que signifique dicha expresión. ☺

Resumen del capítulo

Creo que es posible (y adecuado) que resuma los desarrollos de este capítulo en unos pocos párrafos.

De acuerdo con mis análisis:

- La única clase de infinitos que tienen cabida en la física son los infinitos inagotables. Justamente aquellos en los que no se llega nunca al infinito.

En estos “infinitos” se puede ir de un elemento a otro cualquiera mediante un recorrido sistemático.
Estos infinitos poseen, inevitablemente, un punto de inicio

- Los infinitos por definición sólo pertenecen al campo de la imaginación humana.

Una de sus características principales es que no se puede ir de un elemento a otro cualquiera mediante un recorrido sistemático.

- La existencia de cambios (movimiento) obliga a que los entes primarios del universo sean discretos. Esto no es más que validar los argumentos complementarios de las escuelas de pensamiento de Zenón y de Demócrito
- Un Universo discreto sólo puede operar con un número finito de cifras significativas.
- Las interacciones con “redondeo” (físico o matemático) dan lugar a sistemas irreversibles
- La reversibilidad de las leyes de la física sólo es compatible con matemáticas continuas.

Las matemáticas del continuo sólo puede brindar una aproximación a la descripción de la realidad.
Si las matemáticas incorporaran orgánicamente el redondeo de cifras para describir la Naturaleza, comenzarían a aparecer escenarios impensables con las matemáticas de funciones continuas.