

Preludio al Capítulo VII

*“¡Dos en uno!
es el nombre que la barra,
en los momentos de farra,
así les sabe llamar;
yunta brava
que vuelven otario al pillo,
también con todo ese brillo,
quién no se va a encandilar”*

*Del tango “Dos en Uno”
con letra de **Enrique Cadícamo**.*

RELATIVIDAD ESPECIAL Y RELATIVIDAD GENERAL

Al siguiente desarrollo no puedo otorgarle la magnitud un capítulo. Por lo tanto cae en la categoría de Intermedio. Pero, a diferencia de los otros intermedios, en éste se plantea un análisis técnico. Por lo tanto no es un Intermedio Filosófico. Es sólo un preludio a los temas que se desarrollan a continuación.

La pregunta que pretendo responder es la siguiente:

- ¿Puede seguir aplicándose la Relatividad Especial en presencia de campos gravitatorios?

Como veremos, necesito una respuesta adecuada a esta pregunta para tratar algunos temas del capítulo siguiente.

En general se acepta que cuando aparecen campos gravitatorios debe dejarse de lado la Relatividad Especial y emplear la Relatividad General.

Sin embargo el sentido común y la experiencia indican que la Relatividad Especial sigue teniendo aplicación, al menos en presencia de campos gravitatorios débiles.

Nota del Autor: *La expresión “sentido común” se emplea para causar explícita urticaria a quienes afirman que debemos dejarlo de lado toda vez que nos adentramos en la Relatividad Especial. ☺*

ALGUNAS EXPERIENCIAS

El Experimento de Michelson

Pese a que el experimento original y sus variantes posteriores se realizaron en presencia del campo gravitatorio terrestre (aceleración = $1g$), para justificar su resultado se recurre únicamente a la Relatividad Especial.

En la misma categoría caen el experimento de “arrastre” parcial del éter de Fizeau y todas las experiencias pre-relativistas que debieron esperar a la formulación de la Relatividad Especial para ser explicadas.

En todos estos casos, pese a la presencia de un campo gravitatorio, su influencia

no se tiene en cuenta en los cálculos.

La explicación más simple establece que no es necesario tener en cuenta su influencia porque sus efectos son constantes a lo largo de las experiencias. De este modo podemos decir que lo que se mide en estos experimentos, es el efecto de velocidades relativas (Relatividad Especial) superpuesto a cualquier efecto con valor fijo, de los campos gravitatorios (Relatividad General).

Los Aceleradores de Partículas

Este caso podría agruparse con los ejemplos anteriores, pero lo menciono aparte porque para describir su comportamiento se recurre sólo a la Relatividad Especial, pese a las notables aceleraciones a que se someten las partículas en estudio. Ésta no es más que otra muestra de que no es necesario recurrir a la Relatividad General cuando se trata con sistemas acelerados.

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

Este es un caso particular de aplicación de la Teoría de la Relatividad que afecta directamente tareas cotidianas. Quienes viajan actualmente en avión o barco, o emplean las diferentes variantes de GPS para usos particulares, dependen del buen cumplimiento de las ecuaciones de Einstein en los relojes ubicados en los satélites de este notable sistema de posicionamiento.

Los relojes del sistema GPS están ubicados en órbitas a unos 20,000 km de la superficie terrestre, trasladándose a razón de unos 14,000 km/h. De este modo realizan un giro orbital, aproximadamente, cada 12 h.

Para lograr la notable precisión con que proporcionan las coordenadas geográficas, estos relojes trabajan con una precisión del orden de los nanosegundos (10^{-9} s). Pero, para que esta precisión se mantenga en el tiempo, el ritmo de los relojes está alterado para compensar los efectos del campo gravitatorio terrestre y de la velocidad de traslación orbital.

- El campo gravitatorio terrestre es más débil a la distancia en que orbitan estos satélites que en la superficie terrestre. La Relatividad General permite cuantificar su efecto sobre la marcha de los relojes. Como resultado del diferente campo gravitatorio, los relojes en órbita adelantan, con respecto a los que permanecen en tierra, unos 45 microsegundos (45×10^{-6} s) por día.
- Dado que los relojes en órbita se trasladan a la velocidad indicada, el atraso calculado mediante las transformadas de Lorentz es de unos 7 microsegundos.

La corrección total (calculada al nanosegundo) es la suma de ambos efectos:

- Corrección diaria = Adelanto por Gravedad Menor – Retraso por Velocidad Relativa.
- Corrección diaria = + 45 - 7 = 38 microsegundos.

Este ejemplo no sólo muestra que la Relatividad Especial sigue teniendo validez en presencia de campos gravitatorios poco intensos, sino que, en estos casos, los cálculos de la Relatividad General y de la Relatividad Especial pueden hacerse en forma independiente.

La ecuación que contempla la acción simultánea de campos gravitatorios y velocidades relativas, obtenida mediante la Relatividad General, es la siguiente:

$$\bullet \ dt' = dt [1 - v^2/c^2 - 2GM/rc^2]^{0.5} \quad [1]$$

Donde

- dt' = Intervalo temporal en el sistema móvil (S') sometido a la acción de un campo gravitatorio.
- dt = Intervalo temporal en el sistema considerado estacionario y fuera del campo gravitatorio.
- G = Constante de Gravitación Universal.
- M = Masa que da lugar al campo gravitatorio.
- r = distancia del sistema S' al centro de masas de M .
- v = Velocidad relativa de ambos sistemas.
- c = velocidad de la luz en el vacío.

Como se puede observar, la ecuación [1] se convierte en la expresión equivalente de las transformadas de Lorentz, para $M = 0$ (ausencia de campos gravitatorios).

$$\bullet \ dt' = dt [1 - v^2/c^2]^{0.5} \quad [2]$$

Por otro lado, en ausencia de velocidades relativas, la expresión [1] se transforma en:

$$\bullet \ dt' = dt [1 - 2GM/rc^2]^{0.5} \quad [3]$$

Podemos hacer un simple desarrollo algebraico para comprobar que, en presencia de campos gravitatorios poco intensos y bajas velocidades relativas, los fenómenos pueden aislarse de modo que, en forma genérica, puede escribirse:

- Diferencia de Tiempos = Diferencia por gravedad + Diferencia por velocidad relativa.

Reemplazando " v^2/c^2 " por la letra " a " y " $2GM/rc^2$ " por la letra " b ", la ecuación [1] se transforma en:

$$\bullet \ dt' = dt [1 - (a + b)]^{0.5} \quad [4]$$

Que para valores pequeños de $(a+b)$ puede aproximarse con

$$\bullet \ dt' = dt [1 - (a + b) / 2] \quad [5]$$

Y restando a ambos miembros el valor de dt resulta:

$$\bullet \ dt' - dt = dt [1 - (a + b) / 2] - dt \quad [6]$$

y, reagrupando,

$$\bullet \ dt' - dt = - dt (a + b) / 2 \quad [7]$$

ó

$$\bullet \ dt' - dt = - dt a / 2 - dt b / 2 \quad [8]$$

Pero, con **a** y **b** pequeños, las expresiones [2] y [3] pueden re-escribirse como

$$\bullet \ dt' = dt \left[1 - \frac{a}{2} \right] \quad [9]$$

$$\bullet \ dt' = dt \left[1 - \frac{b}{2} \right] \quad [10]$$

De modo que la expresión “- $\frac{dt \ a}{2}$ ” es una excelente aproximación del valor “ $dt' - dt$ ” despejado de la expresión [9] y el término “- $\frac{dt \ b}{2}$ ” es una excelente aproximación del valor “ $dt' - dt$ ” despejado de la expresión [10] cuando tanto **a** como **b** son pequeños.

En resumen, la expresión [8] muestra que para campos gravitatorios leves y velocidades relativas no muy importantes, la diferencia entre relojes de uno y otro sistema ($dt' - dt$) puede aproximarse con razonable exactitud sumando los efectos del campo gravitatorio (Relatividad General) y de la velocidad relativa (Relatividad Especial).

***Nota:** Con las magnitudes asociadas al sistema GPS los términos “a” y “b” son del orden de 10^{-10} , por lo que la separación de los efectos conduce a una aproximación excelente del resultado verdadero.*

CONCLUSIONES

Los análisis de este intermedio muestran que las ecuaciones de la Relatividad Especial siguen teniendo validez en presencia de campos gravitatorios débiles.

Lo anterior significa que si La Tierra se cruzara con un planeta similar, moviéndose a unos pocos cientos de kilómetros por segundo, habida cuenta de la igualdad de efectos gravitatorios, las transformadas de Lorentz serían perfectamente válidas para describir el funcionamiento relativo de los relojes en ambos sistemas.

Este último punto es muy significativo para los desarrollos que se presentan en el próximo capítulo.